மெய்யெண்களின் சில முக்கியமான உட்கணங்கள் :

வரையரை 1.21 : (இயல் எண்கள் N)

$1 \in N, n \in N \Rightarrow n+1 \in N$ என்ற பண்புகளைக் கொண்ட மிகக் குறைந்த Rன் உட்கணம், இயல் எண்களின் கணம் எனப்படும்.

i.e., $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ என்பது இயல் எண்கள் அல்லது மிகை முழு எண்களின் கணமாகும்.

வரையரை 1.22 : முழு எண்களின் கணம் (Z)

(i) $Z \supset N$, (ii) Zல் +க்கான சமனி உறுப்பு '0' உள்ளது.

(iii) $x \in Z \Rightarrow -x \in Z$ என்ற பண்புகளைக் கொண்ட Rன் மீச்சிறு உட்கணம். Z என்பது எல்லா முழு எண்களின் கணமாகும்.

i.e., $Z = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

வரையரை 1.23 : (விகிதமுறு எண்களின் கணம் Q)

(i) $Q \supset N$, (ii) Q ஒரு களம் என்ற பண்புகளைக் கொண்ட Rன் மீச்சிறு உட்கணம், விகிதமுறு எண்களின் கணம் எனப்படும்.

$Q = \{\, p/q \mid p, q \in Z, q \neq 0 \,\}$ ஆகும்.

குறிப்பு :

1. (விகிதமுறா எண்) ஒரு மெய்யெண் விகிதமுறு எண் இல்லை எனில் அது விகிதமுறா எண் எனப்படும். (இப்படிப்பட்ட எண்களின் எண்ணிக்கை எண்ணற்றவை என பின் நிறுவுவோம்).

2. Q என்பதில் வரிசை முழுமைப் பண்பு இல்லை (என நிறுவுவோம்).

தேற்றம் 1.24 : ஒரு எண்ணின் வர்க்கம் 2 ஆக அமையுமாறு எந்த ஒரு விகிதமுறு எண்ணும் இல்லை.

(or)

$x^2 = 2$ எனில் x ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல என நிறுவுக. (அதாவது $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அலல).

நிரூபணம் : $x^2 = 2$ எனில் x ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல என நிறுவ வேண்டும். (i.e.) $\sqrt{2}$ விகிதமுறு எண் அல்ல என நிறுவ வேண்டும். முடிந்தால் $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் எனக் கொள்க.

பின் $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ p, q களுக்கிடையில் 1ற்கு மேற்பட்ட பொதுக்காரணியில்லை எனக் கொள்வோம். ——(1)

$\Rightarrow p^2 = 2q^2$ ——(2)

$\Rightarrow p^2$ ஒரு இரட்டைப்படை முழு வர்க்கம்.

$\Rightarrow p$ ஒரு இரட்டைப்படை

$\therefore$ $p = 2n$ $(n \in N)$ என்ற வடிவில் அமையும்.

இதை (2)ல் பிரதியிட $(2n)^2 = 2q^2$

$\Rightarrow 4n^2 = 2q^2$

$\Rightarrow q^2 = 2n^2$

$\Rightarrow q^2$ ஒரு இரட்டைப்படை வர்க்கம்.

$\Rightarrow q$ ஒரு இரட்டைப்படை.

$\therefore q = 2m$ $(m \in n)$ என்ற வடிவில் அமையும்.

$p = 2n, q = 2m \Rightarrow p, q$ களுக்கிடைப்பட்ட பொதுக் காரணி 2. இது நாம் எடுத்துக்கொண்ட கொள்கை (1)ற்கு முரண்பாடு. எனவே $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் என்பது தவறு. $\therefore$ $\sqrt{2}$ ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல.

தேற்றம் 1.25 : விகிதமுறு எண்களின் கணம் (Q) வரிசை முழுமைப் பண்பு கொண்டதல்ல.

நிரூபணம் : விகிதமுறு எண்களின் கணம் Qல் வரிசை முழுமைப்பண்பு இல்லை எனக்காட்ட, நாம் Qவில் மேல் வரம்புடைய கணத்திற்கு, ஒரு விகிதமுறு எண் மீச்சிறு மேல்வரம்பாக அமையவில்லை என ஒரு எடுத்துக்காட்டு கொடுத்தால் போதும்.

$S = \{x \in Q^+ / 0 < x^2 < 2\}$ என்ற மிகையெண்களின் கணம் Qன் ஒரு உட்கணம். $1 \in S \Rightarrow S \neq \phi$. மற்றும் 2 என்பது Sன் ஒரு மேல்வரம்பு. எனவே S என்பது மேல்வரம்புடைய, வெற்றற்ற விகிதமுறு எண்களின் உட்கணம். இதற்கு எந்த விகிதமுறு எண்ணும் மீச்சிறு கீழ்வரம்பாக அமையாது என நிறுவுவோம்.

x ஏதோ ஒரு விகிதமுறு எண் எனில் (i) $x \leq 0$ (ii) $x > ($ ஆகும்.

வகை (i) : $x \le 0$ எனில் x, Sன் மேல்வரம்பாக அமையாது.
($\because$ Sல் மிகை எண்கள் தான் உண்டு)

$\therefore \quad x \neq \text{Sup}(S)$

வகை (ii) : $x > 0,\ 0 < x^2 < 2$ என்க.

$$y = \frac{4+3x}{3+2x} \text{ என்க. பின் } y > 0 \qquad \text{———(1)}$$

மற்றும்

$$y^2 - 2 = \frac{(4+3x)^2}{(3+2x)^2} - 2 = \frac{x^2-2}{(3+2x)^2} \qquad \text{——— (2)}$$

$$y - x = \frac{4+3x}{3+2x} - x = \frac{2(2-x^2)}{3+2x} \qquad \text{——— (3)}$$

$\Rightarrow \quad y - x > 0$

$\Rightarrow \quad y > x$

மற்றும் (1), (2)லிருந்து $0 < y^2 < 2 \Rightarrow y \in S$

ஆனால் $x < y \Rightarrow x$ என்பது Sன் மேல்வரம்பாக அமையாது. எனவே மீச்சிறு மேல்வரம்பாகவும் அமையாது. $\therefore x \neq \text{Sup}(S)$

வகை (iii) : $x > 0, x^2 = 2$ என்க.

ஆனால் $x^2 = 2$ எனில் x ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல என அறிவோம். எனவே இந்த வகையைப் பார்க்க வேண்டியதில்லை.

வகை (iv) : $x > 0, x^2 > 2$ என்க.

தற்போதும் $y = \dfrac{4+3x}{3+2x}$ என்க. பின் $y > 0$

(2)லிருந்து $\quad y^2 - 2 = \dfrac{x^2-2}{(3+2x)^2} > 0 \Rightarrow y^2 > 2$

(3)லிருந்து $\quad y - x = \dfrac{2(2-x^2)}{(3+2x)^2} < 0 \Rightarrow y < x$

பின் $p \in S$ எனில் $0 < p^2 < 2$

$\Rightarrow 0 < p^2 < 2 < y^2$

$\Rightarrow p^2 < y^2$

$\Rightarrow p < y$

$\Rightarrow p < y < x$ [$y < x$]

$\Rightarrow$ x, y என்பன Sன் மேல்வரம்புகள்.

ஆனால் $y < x \Rightarrow x$ என்பது Sன் மீச்சிறு மேல்வரம்பல்ல

$\therefore \quad x \neq \text{Sup}(S)$

இவ்வாறு எல்லா வகைகளிலும் $x \neq \text{Sup}(S)$

எனவே தேற்றம் உண்மை.

எண்ணக்கூடிய, எண்ண முடியாக் கணங்கள் : (Countable and Uncountable Sets)

வரையரை 1.26 : (முடிவுள்ள, முடிவிலாக் கணங்கள்)

S என்பது வெற்றுக்கணம் அல்லது

$N_n = \{1, 2, 3, \ldots . n\} \rightarrow$ Sற்கு ஒன்றிற்கொன்றான ஒரு மேல் கோர்த்தல் உடைய கணம் எனில் அது முடிவுள்ள கணம் எனப்படும். S முடிவுள்ள கணம் இல்லை எனில் அது முடிவிலாக் கணம் எனப்படும்.

எ-டு :

1. Q ஒரு முடிவுள்ள கணம்.
2. $S = \{1, 2, 3, \ldots 100\}$ முடிவுள்ள கணம்.
3. N, Z, Q, R என்பன எல்லாம் முடிவிலாக் கணங்கள்.

வரையரை 1.27 : (எண்ணிடக்கூடிய கணம்) (Enumerable Set)

இயல் எண்களின் கணம் $N \rightarrow S$ற்கு ஒன்றுக்கொன்றான மேல்கோர்த்தல் ஒன்று இருப்பின் S என்பது எண்ணிடக்கூடிய கணம் எனப்படும்.

வரையரை 1.28 : (எண்ணக்கூடிய கணம் - எண்ண முடியாக் கணம்) (Countable and Uncountable sets)

ஒரு கணம் முடிவுள்ளது அல்லது எண்ணிடக்கூடியது எனில் அது எண்ணக்கூடிய கணம் எனப்படும். ஒரு கணம் எண்ணக்கூடிய கணம் எனில். அது எண்ண முடியாக் கணம் எனப்படும்.

எ-டு :

1. N என்பது எண்ணக்கூடிய கணம்.

2. எல்லா முழு எண்களின் கணம் Z எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் :

$f : N \rightarrow Z$ ஐ

(i) $f(n) = \dfrac{n-1}{2}$ $n = 1, 3, 5, \ldots$

$f(n) = -\dfrac{n}{2}$ $n = 2, 4, 6 \ldots$

என வரையறுக்கப்பட்டால், f என்பது 1–1 ஆன மேல்கோர்த்தல் ஆகும். எனவே Z எண்ணக்கூடிய கணம்.

மாற்று முறை :

$$\begin{array}{ccccccccc} N = \{ & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots \} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ Z = \{ & 0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots \} \end{array}$$

என்ற தொடர்பு 1 – 1 ஆன தொடர்பாகும். எனவே Z எண்ணக்கூடிய கணமாகும்.

3. S எண்ணக்கூடியது எனில் $S = \{a_1, a_2\ a_3, \ldots .\}$ என அமையும்.

தேற்றம் 1.29 : எண்ணக்கூடிய கணத்தின் ஒவ்வொரு உட்கணமும், எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : A ஒரு எண்ணக்கூடிய கணம் என்க. B, Aன் ஒரு உட்கணம் என்க. B முடிவுள்ளது எனில் வரையரைப்படி B எண்ணக்கூடியது ஆகும். எனவே நாம் B முடிவிலாக் கணம் எனக் கொள்வோம். எனவே Aயும் முடிவிலா, எண்ணக்கூடிய கணமாகும். எனவே $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots .\}$ எனக் கொள்ளலாம். B, Aயின் உட்கணம் ஆதலின், Bன் ஒவ்வொரு உறுப்பும் ஒரு குறியீட்டெண் 'i'ற்கு a_i என்ற வடிவில் அமையும். பின் $a_{n_1} \in B$ என்றவாறு உள்ளதில் n_1 மிகக்குறைந்த குறியீட்டு எண் என்க. இதற்கு அடுத்து $a_{n_2} \in B$ என்றவாறும் $a_{n_2} \in A - \{ a_{n_1} \}$ என்றவாறும் உள்ள மிகக்குறைந்த குறியீட்டு எண் n_2 என்க.

இதுபோல் $a_{n_3} \in B$, $a_{n_3} \in A \sim \{a_{n_1}, a_{n_2}\}$ என்றவாறு n_3 என்பது மிகக்குறைந்த குறியீட்டு எண் என்க. இம்முறையைத் தொடர்ந்து செய்தால்,

$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} \ldots\}$ எனப் பெறலாம்.

$B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3} \ldots\}$ என்ற கோர்த்தல் பின் $f : N \rightarrow B$, $f(k) = a_{n_k}$ ($k = 1,2,3 \ldots$) 1 - 1 ஆன, மேல் கோர்த்தல் ஆகும். எனவே B எண்ணக்கூடிய கணமாகும்.

தேற்றம் 1.30 : எண்ணமுடியாக் கணத்தின் ஒவ்வொரு மீக்கணமும் ஒரு எண்ண முடியாக் கணமாகும்.

நிரூபணம் : B என்பது எண்ண முடியாக் கணம். இதன் ஒரு மீக்கணத்தை A என்க. பின் $A \supset B$ (i.e. $B \subset A$). A எண்ணக் கூடிய கணம் எனில், அதன் உட்கணம் Bயும் எண்ணக்கூடியதாகும். ஆனால் B எண்ணமுடியாக் கணம். எனவே Aயும் எண்ணமுடியாக் கணம்.

தேற்றம் 1.31 : $A_1, A_2, A_3 \ldots.$ என்பவை எண்ணக்கூடிய கணங்கள் எனில் $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ம் எண்ணக்கூடியது.

(அல்லது)

எண்ணக்கூடிய கணங்களின் எண்ணக்கூடிய சேர்ப்புக் கணமும் எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : $A_1, A_2, A_3 \ldots.$ என்பன ஒவ்வொன்றும் எண்ணக்கூடிய கணங்கள். எனவே அவைகளின் உறுப்புக்களை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$
\begin{array}{lllll}
A_1: & a_{11} \rightarrow & a_{12} & a_{13} \rightarrow & a_{14} \ldots \\
A_2: & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots \\
A_3: & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \ldots
\end{array}
$$

A_n: a_{n1} a_{n2} a_{n3} a_{n4} . . . . .

. . . .

. . . .

இப்பாடத்தில் a_{ij} என்ற உறுப்பு, iஆவது நிரையில் jஆவது நிரலில் உள்ள உறுப்பு. இங்கு a_{ij}ன் உயரம் = i+j என வரையறுக்கப்பட்டு. உயரங்களின் வரிசையில் அம்புக்குறிகள் போடப்பட்டுள்ளன. a_{11}ன் உயரம் 2. 2 உயரத்தில் உள்ள ஒரே உறுப்பு a_{11}. a_{12}, a_{21}களின் உயரம் 3. ∴ 3 உயரத்தில் உள்ள உறுப்புகள் $\{a_{12}, a_{21}\}$. இது போன்று 'm' உயரம் கொண்ட உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை (m−1). அவை $\{a_{1,m-1}, a_{2,m-2}, \ldots\ldots, a_{m,1}\}$ ஆகும். எனவே உயரங்களின் வரிசையில் போடப்பட்ட அம்புக்குறிகள் வழியாக, படத்தில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளும் எண்ணக்கூடியவை. எனவே $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ என்பது படத்தின் வழி உள்ள உறுப்புகளின் கணத்தின் உட்கணமாகும். எனவே $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ம் எண்ணக்கூடிய கணமாகும்.

வரையறை 1.32 : (இரு கணங்களின் கார்டீசியன் பெருக்கல்)

A, B இரு கணங்கள் எனில் அவைகளின் கார்டீசியன் பெருக்கம் $A \times B = \{(a, b) / a \in A, b \in B\}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எ-டு : $A = \{x, y, z\}, B = \{a, b\}$ எனில்

$A \times B = \{(x, a), (x, b), (y, a), (y, b), (z, a), (z, b)\}$ ஆகும்.

தேற்றம் 1.33 : N இயல் எண்களின் கணம் எனில் N x N எண்ணக்கூடிய கணமாகும்.

நிரூபணம் : $N \times N = \{(i, j) / i, j \in N\}$

N x Nன் எல்லா உறுப்புகளை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$
\begin{array}{lllll}
\{ & (1,1) \longrightarrow & (1,2) & (1,3) \longrightarrow & (1,4) \ldots \\
 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) \ldots \\
 & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) \ldots \\
 & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

. . . . }

மேற்கண்ட அமைப்பில் அம்புக்குறிகளின் பாதையில் வரிசையாக எல்லா உறுப்புகளையும் எண்ணிவிடலாம். எனவே $N \times N$ எண்ணக்கூடிய கணம்.

தேற்றம் 1.34 : எல்லா மிகைவிகிதமுறு எண்களின் கணம் (Q^+) எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : ஒவ்வொரு மிகை விகிதமுறு எண்ணையும் p/q (p, $q \in N$, p, qகள் ஒன்றிற்கொன்று பகாத் தன்மை கொண்டவை) என்ற வடிவில் எழுதலாம்.

$$\therefore \quad Q^+ = \{ p/q \,/\, p, q \in N, \; (p, q) = 1 \}$$

பின் $B = \{ (p, q) / p, q \in N, \; (p, q) = 1 \}$ என்க.

இது $N \times N$ன் ஒரு உட்கணம். எனவே B எண்ணக்கூடியது. தற்போது $f : Q^+ \rightarrow B$ஐ $f(p/q) = (p, q)$ என வரையறுத்தால் f Q^+லிருந்து Bற்குள்ள $1 - 1$ ஆன மேல்கோர்த்தல். (B எண்ணக்கூடியது). எனவே Q^+ம் எண்ணக்கூடிய கணம்.

துணைத்தேற்றம் : எல்லா குறை விகிதமுறு எண்களின் கணம் (Q^-) எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : $Q^+ = \{p/q \mid p, q \in N, \; (p, q) = 1\}$ எண்ணக்கூடியது. $Q^- = \{-p/q \,/\, p, q \in N, \; (p, q) = 1\}$ ஆகும். $f : Q^+ \rightarrow Q^-$ $f(p/q) = -p/q$ என வரையறுத்தால் f, Q^+லிருந்து Q^-ற்குள்ள $1 - 1$ ஆன மேல்கோர்த்தல். எனவே Q^-ம் எண்ணக்கூடியது.

தேற்றம் 1.35 : எல்லா விகிதமுறு எண்களின் கணம் எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{ 0 \}$

வலப்புறத்தில் (i) Q^+ எண்ணக்கூடியது (நிறுவுக).

(ii) Q^- எண்ணக்கூடியது (நிறுவுக).

(iii) $\{ 0 \}$ முடிவுள்ள கணம். $\therefore$ எண்ணக்கூடியது.

(iv) எண்ணக்கூடிய மூன்று கணங்களின் சேர்ப்புகளும் எண்ணக்கூடியது. எனவே Qம் எண்ணக்கூடிய கணம்.

மாற்று முறை : ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் nற்கு

$$A_n = \left\{ \frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{-1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{-2}{n}, \ldots \right\}$$ என்க.

பின் An $n = 1, 2, 3 \ldots$ களுக்கு எண்ணக்கூடியது. எனவே $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ம் எண்ணக்கூடியது. ஆனால் $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

$\Rightarrow$ Qம் எண்ணக்கூடியது.

துணைத்தேற்றம் : [0, 1]ல் எல்லா விகிதமுறு எண்களும் எண்ணக்கூடியவை.

நிரூபணம் : Q எண்ணக்கூடியது. [0, 1]ல் உள்ள விகிதமுறு எண்களின் கணம், Qன் உட்கணம். எனவே எண்ணக்கூடியது.

குறிப்பு : அடுத்து நாம் மெய்யெண்களின் கணம் R எண்ணமுடியாக்கணம் என நிறுவுவோம். இதற்கு மெய்யெண்களின் தசம விரிவு என்பதைப்பற்றித் தெரிந்து கொள்வோம். $x \in R$ எனில்

$$x = a_0 . a_1 a_2 a_3 \ldots$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \frac{a_3}{1000} + \ldots \qquad (1)$$

என்பதில் a_0 ஒரு முழு எண். $a_1 a_2 a_3 \ldots$ என்பன ஒவ்வொன்றும் 0 முதல் 9 வரையுள்ள முழு எண்களில் ஒன்றினைக் குறிக்கும். இந்த விரிவு முறையில் $x = \frac{p}{2^m 3^n}$

(p ஒரு முழு எண், $m, n \in \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ என்பது மட்டும் இரு முறைகளில் விரித்து எழுத முடியும். எடுத்துக்காட்டாக

$1/2 = .5000$ or $1/2 = .4999 \ldots$ என விரித்து எழுதலாம். மற்றைய எண்களுக்கு ஒரே ஒரு விரிவுதான் உண்டு. மறுதலையாக (1)ன் வடிவத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு விரிவும், ஒரு மெய்யெண்ணைக் குறிக்கும்.

தேற்றம் 1.36 : மெய்யெண்களின் கணம் R எண்ணமுடியாக் கணமாகும். (அல்லது)

[0, 1] என்ற கணத்தின் மெய்யெண்கள் எண்ண முடியாதவை.

நிரூபணம் : மெய்யெண்களின் கணம் எண்ணமுடியாது என்று நிறுவ, [0, 1] என்ற கணம் எண்ணமுடியாக் கணம் என நிறுவினால் போதும். இதை நாம் முரண்பாட்டுக் கொள்கை மூலம் நிறுவுவோம்.

முடிந்தால் [0, 1] எண்ணக்கூடிய கணம் என்க. பின் f $: N \rightarrow [0, 1]$ற்கு 1 – 1 ஆன மேல்கோர்த்தல் ஆகும். எனவே [0, 1]ன் எல்லா உறுப்புகளையும் { f(1), f(2), f(3) . . . . } என எழுதலாம். அவை எலலாம் [0, 1]ல் அமைவதால், அவைகளின் தசம விரிவுகளை

$$f(1) = 0 \,.\, a_1^1 \, a_2^1 \, a_3^1 \ldots$$

$$f(2) = 0 \,.\, a_1^2 \, a_2^2 \, a_3^2 \ldots$$

$$f(3) = 0 \,.\, a_1^3 \, a_2^3 \, a_3^3 \ldots$$

. . . . . .

. . . . .

$$f(n) = 0 \,.\, a_1^n \, a_2^n \, a_3^n \ldots .$$

. . . .

. . . . .

என எழுதலாம். இங்கு $a_j i \in \{ 0, 1, 2, \ldots . 9 \}$

பின் ஒவ்வொரு $n \in N$ற்கும் b_n என்ற முழு எண்ணை,

$b_n = 1$ ($a_n^n \neq 1$ எனில்)

$= 2$ ($a_n^n = 1$ எனில்) எனத் தெரிந்தெடுப்போம்.

(எடுத்துக்காட்டாக, $a_1^1 \neq 1$ எனில் $b_1 = 1$

$a_1^1 = 1$ எனில் $b_1 = 2$)

எந்த $n \in N$ற்கும் $b_n \neq a_n^n$. தற்போது $y = 0 \,.\, b_1 b_2 b_3 \ldots$ என்ற எண்ணை எடுத்துக்கொள்க. ($b_n \neq 9, b_n \neq 0$ ஆதலின் இந்த விரிவு தனித்தது). $y \in [0, 1]$ என்பது தெளிவு. ஆனால் y என்பது f(1)ன் முதல் தசமத்தானத்தில், f(2)ன் இரண்டாம் தசமத் தானத்தில்

. . . .

என வேறுபடுவதால் $y \notin \{ f(1), f(2), f(3) \ldots . . \}$

எனவே $y \in [0, 1]$ என்ற, என்ன எண்ணப்படவில்லை. இது

முரண்பாடு. எனவே [0, 1] என்பது எண்ணமுடியாத் கணம்.

துணைத்தேற்றம் : விகிதமுறா எண்களின் கணம் எண்ண முடியாதது.

நிரூபணம் : விகிதமுறா எண்களின் கணம் I என்பது எண்ணக்கூடியது என்க.

பின் $R = Q \cup I \Rightarrow R$ எண்ணக்கூடிய கணம். இது R எண்ண முடியாதது என்பதற்கு முரண்பாடு.

$\therefore$ Iயும் எண்ணமுடியாத கணமாகும்.

தேற்றம் 1.37 : n படியுள்ள, முழு எண்களை குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்பு

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

என்ற வடிவில் அமையும் எல்லா n படிச்சார்புகள் ின் கணம் P_n எனில், P_n எண்ணக்கூடிய கணமாகும்.

நிரூபணம் : nன் மீது தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி இதை நிறுவுவோம். $n = 0$ எனில் $f(x) = a_0$ ஒரு முழு எண். எனவே p_0 என்பது பூச்சியம் தவிர்த்த எல்லா முழு எண்களின் கணம். $\therefore$ p_0 எண்ணக்கூடியது. அதாவது $n = 0$ற்குத் தேற்றம் உண்மை.

தற்போது ஒரு குறிப்பிட்ட மிகை முழு எண் Kற்கு P_k எண்ணக்கூடியது எனக் கொள்க. நாம் P_{k+1}ற்கும் தேற்றம் உண்மை எனக் காட்ட வேண்டும். இதற்கு ஒவ்வொரு மிகை முழு எண் 'm'ற்கு

$$S_m = \{ m x^{k+1} + g / g \in p_k \}$$

$$S_{-m} = \{ -m x^{k+1} + g / g \in p_k \}$$ என்க. இவை இரண்டும் எண்ணக்கூடியவை. பின்

$T_m = S_m \cup S_{-m}$ம் எண்ணக்கூடியது.

$\Rightarrow \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m$ ம் எண்ணக்கூடியது. ஆனால்

$P_{k+1} = \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m \Rightarrow P_{k+1}$ ம் எண்ணக்கூடியது.

தொகுத்தறிதல் கொள்கைப்படி P_n எண்ணக்கூடியது.

பல்லுறுப்புச் சார்புகளின் கணம் Pம் எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : மேற்கண்ட தேற்றப்படி முழு எண் குணகங்களைக் கொண்ட n படி பல்லுறுப்புச் சார்புகளின் கணம் P_n எண்ணக்கூடியது. $\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$ ம் எண்ணக்கூடியது. ஆனால்

$$P = \bigcup_{n=1}^{\infty} p_n \Rightarrow P$$ யும் எண்ணக்கூடியது.

துணைத்தேற்றம் 2 : மேற்கண்ட தேற்றங்களில் பல்லுறுப்புச் சார்புகளின் குணகங்கள் விகிதமுறு எண்களாக இருப்பினும் தேற்றங்கள் உண்மை.

வரையறை 1.38 : இயல்நிலையெண் (இயற்கணித எண்) (Algebraic Number)

விகிதமுறு எண்களைக் குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சமன்பாட்டின் தீர்வாக அமையும் மெய்யெண் இயல்நிலை எண் எனப்படும்.

வரையறை 1.39 : ஒரு மெய்யெண் இயல்நிலை எண் இல்லை எனில் அது அதி இயல் எண் (Transcendental Number) எனப்படும்.

தேற்றம் 1.40 : இயல்நிலை எண்களின் கணம் (Set of algebraci numbers) எண்ணக்கூடியது.

நிரூபணம் : n ஒரு குறிப்பிட்ட மிகை முழு எண் என்க. பின் n படி கொண்ட, விகிதமுறு எண்களை குணகங்களாகக் கொண்ட பல்லுறுப்புக் கோவைச் சார்புகளின் கணம் Q_n எண்ணக்கூடியது. எனவே $Q_n = \{ f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \ldots \}$ என அமையும். இங்கு ஒவ்வொரு f_{nk} என்பதும் n படியுள்ள, விகிதமுறு குணகங்களைக் கொண்ட ஒரு பல்லுறுப்புக் கோவையாகும். A_{nk} என்பது $f_{nk} = 0$ன் மெய்த்தீர்வுகளின் கணம் எனில், A_{nk} ன் அதிகபட்ச உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை 'n' ஆகும். எனவே A_{nk} எண்ணக்கூடியது. அடுத்து $A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{nk}$ எனில் (A_n என்பது Q_nன் தீர்வுகளின் கணமாகும்).

$\therefore A_n$ம் எண்ணக்கூடியது. அடுத்து $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ எனில் A என்பது எல்லா இயல்நிலை எண்களின் கணமாகும். மற்றும் எண்ணக்கூடிய கணங்களின் எண்ணக்கூடிய சேர்ப்பு அதன்

Aயும் எண்ணக்கூடியது.

தேற்றம் 1.41 : அதி இயல் எண்களின் கணம் எண்ண முடியாக் கணமாகும்.

நிரூபணம் : அதி இயல் எண்களின் கணத்தை T என்க. T எண்ணக்கூடியது எனக் கொள்க. பின் $R = A \cup T$ (A என்பது இயல் நிலை எண்களின் கணம்)

$\Rightarrow$ R என்பது எண்ணக்கூடியது. இது முரண்பாடு. எனவே T எண்ண முடியாக் கணம்.

பயிற்சி :

1. $x > y, z < 0$ எனில், $xz < yz$ எனக்காட்டு.
2. $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ என நிறுவுக.
3. $x^2 = 3$ எனில் x ஒரு விகிதமுறு எண் அல்ல எனக்காட்டு.
4. $x^2 = 5$ எனுமாறு x என்ற விகிதமுறு எண் இல்லை எனக்காட்டு.
5. ஒவ்வொரு எண்ணமுடியாக் கணத்திலும், எண்ணக்கூடிய முடிவிலா உட்கணம் உண்டு என நிறுவுக.

பாடம் 2

எல்லைப்புள்ளிகள்

ஒரு புள்ளியின் அண்மை – திறந்த, மூடிய கணங்கள், எல்லைப்புள்ளிகள்.

வரையறை 2.1 : (அண்மை)

$p \in R$ என்ற புள்ளிக்கு, $\in > 0$ என்பது $(p - \in, p + \in) \subset$ என்றவாறு தோன்றினால் $N \subset R$ என்பது pன் ஓர் அண்மை எனப்படும்.

அல்லது

$p \in R$ற்கு, $p \in (a, b)$ எனவும், $(a, b) \subset N$ எனவும் ஒரு திறந்த இடைவெளி தோன்றினால் $N \subset R$ என்பது pன் ஓர் அண்மை எனப்படும்.

எ-டு :

1. $(p - \in, p + \in)$ என்பது pன் ஓர் அண்மை.
2. (a,b) என்பது அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அண்மையாகும்.
3. $[a, b]$ என்பது (a, b)ன் எல்லாப் புள்ளிகளின் அண்மை. ஆனால் $[a, b]$ என்பது a, bகளின் அண்மை அன்று.
4. முழு எண்களின் கணம் Z, அதன் எந்தப் புள்ளிக்கும் அண்மை ஆகாது.

வரையறை 2.2 : (உட்புள்ளி) (Interior point)

ஒரு புள்ளி 'p'ன் அண்மை $N \subset S$ எனில், p, Sன் ஒரு உட்புள்ளி எனப்படும்.

தேற்றம் 2.3 : M, N என்பன $p \in R$ன் இரு அண்மைகள் எனில் $M \cap N$ம் pன் ஒரு அண்மையாகும்.

நிரூபணம் : M, N என்பன pன் இரு அண்மைகள். எனவே

$\exists \quad \in_1 > 0, \in_2 > 0 \ni$

$(p - \in_1, p + \in_1) \subset M$ ——(1)

$(p - \in_2, p + \in_2) \subset N$ ——(2)

$\in = \text{Min}(\in_1, \in_2)$ எனில்

$(p-\in, p+\in) \subset (p-\in_1, p+\in_1) \subset M$

$(p-\in, p+\in) \subset (p-\in_2, p+\in_2) \subset N$

$\Rightarrow \quad (p-\in, p+\in) \subset M \cap N$

எனவே $M \cap N$ம் $p \in R$ன் ஒரு அண்மையாகும்.

தேற்றம் 2.4 : M என்பது pன் ஓர் அண்மையாகவும், $M \subset N$ ஆகவும் இருப்பின் N, pன் ஓர் அண்மையாகும்.

நிரூபணம் : M என்பது pன் ஓர் அண்மை.

$\therefore \exists \in > 0 \ni (p-\in, p+\in) \subset M$

ஆனால் $M \subset N$

$\Rightarrow \quad (p-\in, p+\in) \subset N$

$\Rightarrow$ Nம் pன் ஓர் அண்மை.

வரையறை 2.5 : (திறந்த கணம்) (Open set)

$G \subset R$ என்பது, Gன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அண்மை எனில் G ஒரு திறந்த கணம் எனப்படும்.

அல்லது

$G \subset R$ என்பது, ஒவ்வொரு $p \in G$ற்கும், $\in > 0$ற்கும், $(p-\in, p+\in) \subset G$ என அமைந்தால் G என்பது திறந்த கணம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. வெற்றுக் கணம் திறந்த கணம்.
2. ஒவ்வொரு திறந்த இடைவெளி (a,b)யும் ஒரு திறந்த கணம். உண்மையில் R ஒரு திறந்த கணம்.
3. [a,b] திறந்த கணம் அல்ல. [$\because$ இது 'a', 'b'களின் அண்மை அல்ல]
4. [a, b)ம் திறந்த கணம் அல்ல [$\because$ இது 'a' ன் அண்மை அல்ல]
5. {a} என்ற ஓர் உறுப்புக் கணம் திறந்தது அல்ல.

தேற்றம் 2.6 : திறந்த கணக் குடும்பத்தின் யதேச்சைச் சேர்ப்பும் ஒரு திறந்த கணம். (அல்லது)

$\{G_i / i \in I\}$ என்பது திறந்த கணக்குடும்பம் எனில் $\bigcup_{i \in I} G_i$ ம் ஒரு திறந்த கணம்.

நிரூபணம் : $F = \bigcup_{i \in I} G_i$ என்க.

$p \in F \Rightarrow p \in G_i$ ஒரு $i \in I$

G_i திறந்த கணம் $\Rightarrow \exists \in > 0 \ni$

$(p - \in, p + \in) \subset G_i$ ஒரு $i \in I$

$\Rightarrow (p - \in, p + \in) \subset \bigcup_{i \in I} G_i = F$

$\Rightarrow$ F என்பது pன் அண்மை. இது எல்லா $p \in F$ற்கும் பொருந்தும். $\therefore$ F ஒரு திறந்த கணம்.

தேற்றம் 2.7 : இரு திறந்த கணங்களின் வெட்டுக் கணம் ஒரு திறந்த கணம்.

நிரூபணம் : G_1, G_2 என்பன இரு திறந்த கணங்கள் என்க. பின் $G_1 \cap G_2 = \phi$ எனில் ϕ ஒரு திறந்த கணம். $\therefore G_1 \cap G_2$ம் திறந்த கணம். எனவே $G_1 \cap G_2$ என்பதை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$G_1 \cap G_2 \neq \phi \Rightarrow \exists\, p \in G_1 \cap G_2$$

$\Rightarrow$ $p \in G_1$ மேலும் $p \in G_2$

G_1, G_2 என்பன திறந்த கணங்கள் ஆதலின் அவை pன் அண்மைகள். எனவே $G_1 \cap G_2$ம் pன் ஒரு அண்மை. அதாவது $G_1 \cap G_2$, அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அண்மை. $\therefore G_1 \cap G_2$ ஒரு திறந்த கணம்.

குறிப்பு 1 : மேற்கண்ட முடிவு முடிவுள்ள எண்ணிக்கை வெட்டுக் கணத்திற்குப் பொருந்தும். G_i $i = 1, 2, \ldots n$ திறந்த கணங்கள் எனில், $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ம் ஒரு திறந்த கணம்.

குறிப்பு 2 : முடிவிலி வெட்டுக்களுக்கு இத்தேற்றம் பொருந்தாது.

எ-டு : $G_n = (-1/n, 1/n)$ $n = 1, 2, 3 \ldots.$ எனில்

$G_1, G_2 \ldots$ என்பன திறந்த கணங்கள்.

ஆனால் $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \{0\}$ ஓர் உறுப்புக்கணம். எனவே திறந்த கணம் இல்லை.

வரையறை 2.8 : (மூடிய கணம்) (Closed Set)

$F \subset R$ என்ற கணத்தின் நிரப்புக்கணம் $F^c = R \sim F$ திறந்த கணம் எனில், F ஒரு மூடிய கணம் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. வெற்றுக்கணம் ϕ ஒரு மூடிய கணம். ஓர் உறுப்புக் கணம் மூடிய கணம்.

2. மெய்யெண்களின் கணம் R ஒரு மூடிய கணம்.

3. [a, b] ஒரு மூடிய கணம்.

ஏனெனில் $[a, b]^c = R - [a, b]$

$= (-\infty, a) \cup (b, \infty)$

= திறந்த கணம் ($\because$ இரு திறந்த கணங்களின் சேர்ப்பு)

$\Rightarrow$ [a, b] ஒரு மூடிய கணம்.

4. (a, b) ஒரு மூடிய கணம் இல்லை. ஏனெனில்

$(a, b)^c = R - (a, b)$

$= (-\infty, a] \cup [b, \infty]$

= திறந்த கணம் அல்ல [$\because$ a ன் அண்மை அல்ல]

எனவே (a, b) மூடிய கணம் அல்ல.

குறிப்பு :

1. ஒரு கணம் திறந்ததாக அல்லது மூடியதாக இருக்க வேண்டியதில்லை. எடுத்துக்காட்டாக (a,b] என்பது திறந்ததும் அல்ல, மூடியதும் இல்லை.

2. ஒரு சில கணங்கள் திறந்ததாகவும், மூடியதாகவும் இருக்கலாம். எ-டு. ϕ, R என்பன திறந்தவை, மூடியவை.

தேற்றம் 2.9 : மூடிய கணங்களின் குடும்பத்தின் யதேச்சை வெட்டுக்கணம் ஒரு மூடிய கணம் ஆகும்.

அல்லது

$\{F_i / i \in I\}$ என்பது மூடிய கணங்களின் குடும்பம் எனில்

$H = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)$ என்பதும் ஒரு மூடிய கணம்.

நிரூபணம் : $H = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)$ என்பது மூடிய கணக் குடும்பத்

யதேச்சை வெட்டுக்கணம் என்க. பின்

$$H^c = \left(\bigcap_{i \in I} F_i \right)^c = \left(\bigcup_{i \in I} F_i^c \right)$$

(டி - மார்கன் வி

1. F_i மூடியது $\Rightarrow F_i^c$ திறந்தது.

   திறந்த கணங்களின் யதேச்சைச் சேர்ப்பும் திறந்தது.

$\Rightarrow$ H^c ஒரு திறந்த கணம்.

$\Rightarrow$ H ஒரு மூடிய கணம்.

தேற்றம் 2.10 : இரு மூடிய கணங்களின் சேர்ப்புக் கணம் ஒ

மூடிய கணம்.

நிரூபணம் : F_1, F_2 என்பன இரு மூடிய கணங்கள் எனவு

அவைகளின் சேர்ப்பு $F = F_1 \cup F_2$ என்க. பின்

$$F^c = (F_1 \cup F_2)^c = F_1^c \cap F_2^c$$

(டி மார்கன் வி

(1)ல் F_1, F_2 மூடியவை $\Rightarrow F_1^c, F_2^c$ திறந்தவை

$\Rightarrow F_1^c \cap F_2^c$ திறந்தது

$\Rightarrow F^c$ திறந்தது

$\Rightarrow F$ ஒரு மூடிய கணம்.

குறிப்பு :

1. மேற்கண்ட உண்மை n கணங்களுக்குப் பொருந்தும். i.

   $F_1, F_2, \ldots . F_n$ மூடியவை எனில் $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ம் ஒ

   மூடிய கணம்.

2. தேற்றம் 2.10ல் யதேச்சை சேர்ப்புக் கணம் பொருந்தாது

எ-டு : $F_n = [1/n, 2]$ $n = 1, 2, 3$

ஆனால் $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, 2\right] = (0,2]$ மூடிய கணம் அல்ல.

வரையறை 2.11 : எல்லைப்புள்ளி (Limit point)

$p \in R$ன் ஒவ்வொரு அண்மையும், pஐத் தவிர்த்து, Sன் ஒரு புள்ளியைப் பெற்றிருந்தால், p என்பது $S \subset R$ன் ஒரு எல்லைப் புள்ளி (திரட்சிப்புள்ளி - accumulation point) எனப்படும்.

இதையே குறியீடுகளில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம். pன் ஒவ்வொரு அண்மை Nற்கும்

$N \cap S - \{p\} \neq \phi$ எனில், S ன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி p எனப்படும்.

(அல்லது)

ஒவ்வொரு $\in > 0$ற்கும் $(p-\in, p+\in)$ என்ற திறந்த இடைவெளி 'p'ஐத்தவிர, Sன் ஒரு புள்ளியைப் பெற்றிருப்பின், $p \in R$ என்பது $S \subset R$ன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி எனப்படும்.

குறிப்பு : $p \in R$ என்பது $S \subset R$ன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல என நிறுவ, pன் ஒரு அண்மை Nற்கு

$N \cap S = \{p\}$ அல்லது $N \cap S = \phi$ எனக்காட்ட வேண்டும்.

வரையறை 2.12 : வழிக்கணம் (Derived Set)

$S \subset R$ன் எல்லா எல்லைப்புள்ளிகளின் கணம் Sன் வழிக்கணம் எனப்படும். இது S'ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

எ-டு 1 : ஒவ்வொரு மெய்யெண்ணும், விகிதமுறு எண்களின் கணம் Qவின் எல்லைப்புள்ளியாகும். ஏனெனில், $p \in R$ என்க. $\in > 0$ கொடுக்கப்பட்டது என்க. பின் $(p-\in, p+\in)$ல் Qவின் எண்ணற்ற புள்ளிகள் உள்ளன. $\therefore (p-\in, p+\in)$ என்பது pஐத் தவிர்த்து Qவின் ஒரு புள்ளியைப் பெற்றுள்ளது. ∴ 'p' Qவின் ஒரு எல்லைப்புள்ளி. இது எல்லா $p \in R$ற்கும் பொருந்துவதால் $Q' = R$ ஆகும்.

எ-டு 2 : $[0,1]$ன் ஒவ்வொரு புள்ளியும் $(0,1)$ன் எல்லைப்புள்ளியாகும்.

$p \in [0,1]$ என்க. $\in > 0$ என்க. பின்

$(p-\in, p+\in) \cap (0,1) = (c,d)$ என்க.

இங்கு $c = Max(p-\in, 0)$ $d = Min(p+\in, 1)$

(c,d) என்பது (0,1)ன் எண்ணற்ற புள்ளிகளைக் கொ

எனவே (c,d) pஐத் தவிர்த்து (0,1)ன் ஒரு புள்

பெற்றுள்ளது. $\therefore p \in [0,1]$ என்பது (0,1)ன் எல்லைப்

3. முழு எண்களின் கணம் Zற்கு எல்லைப்புள்ளிகள் இ

நிரூபணம் : $p \in R$ என்க. பின் (i) p ஒரு முழு எண் அ

(ii) p முழு எண் அல்லாத மெய்யெண்.

(i) p ஒரு முழு எண் என்க. $\in = 1/2 > 0$ என்க.

பின் $(p-1/2, p+1/2) \cap Z = \{p\}$

$\therefore$ p, Zன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

(ii) p முழு எண் அல்லாத மெய்யெண் என்க. பின் நா முழு எண் jஐ $j < p < j+1$ எனக்காணலாம். இதில் (j, j+ ஒரு அண்மை. ஆனால் $(j, j+1) \cap Z = \phi$. எனவே p எல்லைப்புள்ளி அல்ல. $\therefore$ Zற்கு எல்லைப்புள்ளிகள் இ

4. முடிவுள்ள கணத்திற்கு எல்லைப்புள்ளிகள் இல்லை

நிரூபணம் : $S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots .a_n\}$ என்பது ஒரு முடி Rன் உட்கணம் என்க. நாம் வசதிக்காக $a_1 < a_2 < \ldots\ldots < a_n$ கொள்வோம். $p \in R$ என்க.

(i) $p < a_1$ எனில் $(-\infty, a_1)$ என்பது pன் ஒரு அண்மை. ஆ $(-\infty, a_1) \cap S = \phi$ $\therefore$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

(ii) $p = a_1$ எனில் $(-\infty, a_2)$ என்பது pன் ஒரு அண்மை. ஆ $(-\infty, a_2) \cap S = \{a_1\}$ $\therefore$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

(iii) $p = a_k$ $(1 < k < n)$ பின் (a_{k-1}, a_{k+1}) என்பது pன் அண்மை. ஆனால் $(a_{k-1}, a_{k+1}) \cap S = \{a_k\}$

$\Rightarrow$ $p = a_k$ என்பது Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

(iv) $a_1 < p < a_n$, $p \neq a_k$ $1 < k < n$ எனில் பின் $a_i < p < a_{i+1}$ ஒரு i தோன்றும். $\therefore (a_i, a_{i+1})$ pன் ஒரு அண்மை. ஆன $(a_i, a_{i+1}) \cap S = \phi$

$\Rightarrow$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

(v) $p = a_n$ எனில் (a_{n-1}, ∞) என்பது pன் ஒரு அண்மை. ஆனா

$(a_{n-1}, \infty) \cap S = \{a_n\} \Rightarrow p$, Sன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

vi) $p > a_n$ எனில் (a_n, ∞) என்பது pன் ஒரு அண்மை. ஆனால் $(a_n, \infty) \cap S = \phi \Rightarrow p$ என்பது Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

எனவே எல்லா வகைகளிலும் $p \in R$ என்பது Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல. ie Sற்கு எல்லைப்புள்ளிகள் இல்லை.

எப்படிப்பட்ட கணங்களுக்கு எல்லைப்புள்ளிகள் இருக்கும் என்பதை கீழ்க்கண்ட தேற்றம் கூறுகிறது.

தேற்றம் 2.13 : (Bolzano – Weierstrass Theorem)

மெய்யெண்களின் வரம்புடைய, ஒவ்வொரு முடிவிலாக் கணத்திற்கும் எல்லைப்புள்ளி உண்டு.

நிரூபணம் : S என்பது, முடிவிலா, வரம்புடைய மெய்யெண்களின் கணம் என்க. $k = Inf(S)$, $k' = Sup(S)$ என்க. நாம் H என்ற கணத்தை $H = \{x \in H \Leftrightarrow x$ என்பது Sன் முடிவுள்ள உறுப்புகளைவிடப் பெரியது$\}$ எனக்கொள்வோம்.

$k \in H \Rightarrow H \neq \phi$

k'ஐவிட பெரிய எண் Hல் அமையாது $\Rightarrow$ H மேல் வரம்புடையது. வரிசை முழுமைப்பண்பின்படி, Hற்கு மீச்சிறு மேல்வரம்பு உண்டு. இதை p என்க. $(p = Sup(H))$. நாம் இந்த $p = Sup(H)$ என்பது Sன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி என நிறுவுவோம்.

$\in > 0$ கொடுக்கப்பட்டது என்க. பின் $p - \in < p$

$\Rightarrow$ $p - \in$ என்பது Hன் மேல்வரம்பல்ல.

$\Rightarrow$ $\exists\, q \in H \ni q > p - \in$

$q \in H \Rightarrow q$, Sன் முடிவுள்ள உறுப்புகளைவிடப் பெரியது.

$\Rightarrow$ $p-\in$ம் Sன் முடிவுள்ள உறுப்புகளைவிடப் பெரியது.

———(1)

அடுத்து $p + \in > p \Rightarrow p + \in \notin H$

$\Rightarrow p + \in$, Sன் எண்ணற்ற உறுப்புகளைவிடப் பெரியது.

———(2)

(1), (2)லிருந்து $(p - \in, p + \in)$, Sன் எண்ணற்ற உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளது $\Rightarrow$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி.

தேற்றம் 2.14 : S மூடிய கணம் $\Leftrightarrow S' \subset S$

நிரூபணம் : $S \subset R$ என்க.

S மூடிய கணம் $\Leftrightarrow R \sim S$ திறந்த கணம்

$\Leftrightarrow R \sim S$ என்பது அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அண்மை

$\Leftrightarrow R \sim S$ன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அண்மை Nற்கும் $N \cap S = \phi$

$\Leftrightarrow R \sim S$ன் எந்தப்புள்ளியும் Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

$\Leftrightarrow S$ன் புள்ளிகள் தான் எல்லைப்புள்ளிகள்

$\Leftrightarrow S' \subset S$

துணைத்தேற்றம் : வெற்றிலா, வரம்புடைய மூடிய கணம் அதன் மீச்சிறு மேல்வரம்பை, மீப்பெரு கீழ்வரம்பை தன்னகத்தே கொண்டது.

நிரூபணம் : S என்பது வரம்புடைய, மூடிய கணம் என்க. S முடிவுள்ளது எனில், Sன் பெரிய உறுப்பு தான், Sன் மீச்சிறு மேல்வரம்பு. $\therefore$ அது Sல் உள்ளது. அடுத்து Sன் சிறிய உறுப்புதான், Sன் மீப்பெரு கீழ்வரம்பு. இதுவும் Sல் உள்ளது.

S முடிவிலாக் கணம் என்க. S வரம்புடையது

$\Rightarrow$ Sற்கு மீச்சிறு மேல்வரம்பு உண்டு. அதை s என்க. இது s, Sன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி $\in S'$. ஆனால் S மூடியது

$\Rightarrow$ $S' \subset S \therefore s \in S$. இதுபோல் Sன் மீப்பெரு கீழ்வரம்பும் Sல் உள்ளது எனக் காட்டலாம்.

தேற்றம் 2.15 : $p \in R$ என்பது S என்ற கணத்தின் எல்லைப்புள்ளி

$\Leftrightarrow$ pன் ஒவ்வொரு அண்மையும் Sன் எண்ணற்ற புள்ளிகளைக் கொண்டது.

நிரூபணம் : (நிபந்தனை தேவை)

$p \in R$ என்பது Sன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி என்க. pன் ஒரு அண்மை Nல், Sன் முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள புள்ளிகள் மட்டும் தான் உண்டு எனக் கொள்வோம்.

$N \cap S$ முடிவுள்ளது ஆகையால்

$N \cap S-\{p\} = \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$ எனக் கொள்ளலாம்.

$$\in = \text{Min}\{\,|p_i - p|\; i = 1,2,3\ldots.n\}$$

பின் $(p-\in, p+\in)$ என்பது pன் ஒரு அண்மை.

எனவே $M = N \cap \{(p-\in, p+\in)\}$, pன் அண்மை.

$$M \cap S-\{p\} = N \cap \{(p-\in, p+\in)\} \cap S-\{p\}$$
$$= \phi$$

$\Rightarrow$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல. இது முரண்பாடு. எனவே pன் ஒவ்வொரு அண்மையிலும் Sன் எண்ணற்ற புள்ளிகள் உள்ளன.

நிபந்தனை போதுமானது : pன் ஒவ்வொரு அண்மையும் Sன் எண்ணற்ற புள்ளிகளைக் கொண்டது $\Rightarrow$ pன் அண்மையில் pஐத் தவிர்த்து Sன் ஒரு புள்ளி உள்ளது. $\Rightarrow$ p, Sன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி.

குறிப்பு :

1. ஒவ்வொரு முடிவுள்ள கணமும் மூடிய கணம்.

நிரூபணம் : S முடிவுள்ள கணம் என்க.

$p \in R$ என்க. p, Sன் எல்லைப்புள்ளி எனில் pன் அண்மையில் Sன் எண்ணற்ற புள்ளிகள் அமையும். ஆனால் S முடிவுள்ளது. $\Rightarrow$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

$$\Rightarrow \quad p \notin S' \Rightarrow S' = \phi \Rightarrow S' \subset S \Rightarrow S$$ மூடியது.

2. ஓர் உறுப்புக்கணம், முடிவுற்றது. எனவே மூடிய கணம்.

தேற்றம் 2.16 : S, T என்பன Rன் இரு உட்கணங்கள் எனில்

(i) $\phi' = \phi$

(ii) $S \subset T \Rightarrow S' \subset T'$

(iii) $(S \cup T)' = S' \cup T'$

(iv) $x \in S' \Rightarrow x \in \{S - \{x\}\}'$

நிரூபணம் :

(i) $\phi' = \phi$

ϕ ன் வெற்றுக்கணம். எனவே முடிவுள்ள கணம். எனவே

எல்லைப்புள்ளிகள் இல்லை. எல்லைப்புள்ளிகளின் கணம் = ϕ

$\Rightarrow \quad \phi' = \phi$

(ii) $S \subset T \Rightarrow S' \subset T'$

$p \in S' \Rightarrow$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி

$\Rightarrow$ p, Tன் எல்லைப்புள்ளி ($\because S \subset T$)

$\Rightarrow p \in T'$

$\therefore \quad S' \subset T'$

(iii) $(S \cup T)' = S' \cup T'$

$p \in (S \cup T)' \Rightarrow$ p என்பது $S \cup T$ன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி

$\Rightarrow$ p என்பது Sன் அல்லது Tன் எல்லைப்புள்ளி

$\Rightarrow$ p, Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்லது p, Tன் எல்லைப்புள்ளி

$\Rightarrow p \in S'$ அல்லது $p \in T'$

$\Rightarrow p \in S' \cup T'$

$\therefore \quad (S \cup T)' \subset S' \cup T'$ ——(1)

அடுத்து $S \subset S \cup T, \quad T \subset S \cup T$

$\Rightarrow S' \subset (S \cup T)', \quad T' \subset (S \cup T)'$

$\Rightarrow S' \cup T' \subset (S \cup T)'$ ——(2)

1, 2லிருந்து $(S \cup T)' = S' \cup T'$

(iii) $x \in S' \Rightarrow x \in \{ s - \{x\} \}'$

$x \in S' \Rightarrow$ x என்பது Sன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி

$\Rightarrow$ xன் ஒவ்வொரு அண்மை Nற்கும் $N \cap S - \{x\} \neq \phi$

$\Rightarrow \{ N - \{x\} \} \cap N - N \cap \{x\} \neq \phi$

$\Rightarrow \{S - \{x\} \} \cap N - \{x\} \neq \phi$

$\Rightarrow$ x என்பது $S - \{x\}$ன் ஒரு எல்லைப்புள்ளி

$\Rightarrow x \in \{ S - \{x\} \}'$

தேற்றம் 2.17 : எல்லாக் கணங்களின் வழிக்கணங்கள் மூடிய

ணங்களாகும். அதாவது Sன் வழிக்கணம் S' எனில் S' மூடிய ணம்.

நிரூபணம் : $S \subset R$ ஏதோ ஒரு கணம் என்க. இதன் வழிக்கணம் S' ஆகும்.

S' மூடியது என நிறுவ நாம் $R \sim S'$ திறந்த கணம் எனக்காட்ட வேண்டும்.

$p \in R \sim S'$

$\Rightarrow$ $p \notin S'$

$\Rightarrow$ p என்பது Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

$\Rightarrow$ pன் ஒவ்வொரு அண்மை Nற்கும் $N \cap S = \{p\}$

குறிப்பாக $\{ (p-\in, p+\in) \} \cap S = \{p\}$ ——(1)

$q \in (p-\in, p+\in)$ $\Rightarrow (p-\in, p+\in)$ என்பது qன் ஒரு அண்மை. (1)ன்படி q என்பது Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல. எனவே $(p-\in, p+\in)$ எந்தப்புள்ளியும் Sன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

$\Rightarrow$ $(p-\in, p+\in) \not\subset S'$

$\Rightarrow$ $(p-\in, p+\in) \subset R \sim S'$

$\Rightarrow$ $R \sim S'$ என்பது pன் அண்மை. இது எல்லா $p \in R \sim S'$ற்கும் பொருந்துமாதலின் $R \sim S'$ அதன் ஒவ்வொரு புள்ளியின் அண்மை.

$\therefore$ $R \sim S'$ ஒரு திறந்த கணம்.

$\therefore$ S' ஒரு மூடிய கணம்.

பயிற்சி :

1. $G \subset R$ திறந்த கணம் $\Leftrightarrow$ ஒவ்வொரு $p \in G$ற்கும் $\exists$ ஒரு திறந்த கணம் $H \ni p \in H \subset G$

2. $[1,2] \cup [3,4]$ மூடிய கணம் எனக் காட்டு.

3. $S = \{ 1/n \;/\; n \in Z^+ \}$ எனில் Sற்கு '0' என்ற ஒரே ஒரு எல்லைப்புள்ளி மட்டும் உண்டு என நிறுவு.

Unit - I

Section 6.1

Connectedness, completeness & compactness, More about open sets.

$\langle M, \rho \rangle$ என்பது ஒரு அளவை வெளி என்க.

A என்பது M-னுடைய வெற்றில்லாத உட்கணம் என்க.

எனில் $\langle A, \rho \rangle$-ம் ஒரு அளவை வெளி ஆகும்.

a ∈ A எனில்

$a \in A$ எனில்,

$B_A[a, r] = \{x \in A \mid \rho(a, x) < r\}$ என்க.

$B_M[a, r] = \{x \in M \mid \rho(a, x) < r\}$ என்க.

எனில்,

$$B_A[a, r] = A \cap B_M[a, r]$$

$B_A[a, r] = [A \cap B_M[a, r]]$

Ex:

$\langle M, \rho \rangle = R'$

$\langle A, \rho \rangle = [0, 1]$ என்க.

மற்றும் $\langle A, \rho \rangle = [0,1]$

எனில், $B_A[0, \frac{1}{2}] = \{x \in A \mid |x - 0| < \frac{1}{2}\}$

$$= \{x \in [0,1] \mid |x| < \tfrac{1}{2}\}$$

$B_A[0, \frac{1}{2}] = x \in A \mid |x - a$

$$= [0, \tfrac{1}{2})$$

$$B_M[0, \tfrac{1}{2}] = \{x \in M = R' \mid |x| < \tfrac{1}{2}\}$$

$$= (-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$

$$\therefore A \cap B_M[0, \tfrac{1}{2}] = [0, 1] \cap (-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2})$$

$$= [0, \tfrac{1}{2})$$

$$= B_A[0, \tfrac{1}{2}]$$

Problem:

Let $A = [0,1]$ Which of the following subsets of are open subsets of A.

a) $[1/2, 1) = [0,1] \cap [1/2, 3/2)$ where $(1/2, 3/2)$ என்
இடைவெளியானது R'-ல் திறந்த கணமாகும்.
எனவே $[1/2, 1]$ ஆனது $[0,1]$ னுடைய திறந்த உட்கண
ஆகும்.

b) $[1/2, 1) = [0,1] \cap [1/2, 1]$
எனவே $[1/2, 1)$ ஆனது $[0,1]$ னுடைய திறந்த
உட்கணம் ஆகும்.

c) $[1/2, 1) = [0,1] \cap [1/2, 1]$
எனவே $[1/2, 1)$ ஆனது $[0,1]$ னுடைய உட்கணமாகும்

Theorem: 1

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி என்க.
A ஆனது M-ன் தகு உட்கணம் என்க [proper subset]
A-ன் உட்கணமான G_A ஆனது $\langle A, \rho \rangle$-ன் திறந்த
உட்கணமாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை
$G_A = A \cap G_M$ என்றவாறு $\langle M, \rho \rangle$-ல் ஒரு திறந்த
உட்கணம் G_M இருக்க வேண்டும்.

Proof:

G_A என்பது A-ல் திறந்த உட்கணம் என்க.
எனில், ஒவ்வொரு $a \in G_A$-க்கும்,
$B_A[a, r_a] \subset G_A$ என்றவாறு ஒரு $r_a > 0$ உள்ளது
எனில், $G_M = \bigcup_{a \in G_A} B_M[a, r_a]$ என்க.

i.e) G_M ஆனது M-ல் உள்ள திறந்த கணங்களின்
சேர்ப்பு ஆகும்.

எனவே G_M ஆனது M-ல் திறந்த கணமாகும்.

மற்றும்,

$$G_M \cap A = \left[\bigcup_{a \in G_A} B_M[a, r_a] \cap A\right]$$

$$= \bigcup_{a \in G_A} [B_M[a, r_a] \cap A]$$

$$= \bigcup_{a \in G_A} B_A[a, r_a]$$

$$= G_A$$

எனவே, $G_A = A \cap G_M$ என்றவாறு ஒரு திறந்த உட்கணம் G_M ஆனது M-ல் உள்ளது.

மறுதலையாக,

G_M, M-ல் திறந்த உட்கணம் என்க.

$G_A = A \cap G_M$ என்க.

G_A ஆனது A-ல் திறந்த கணம் என நிறுவ,

ஒவ்வொரு $a \in G_A$-க்கும்,

$B_A[a, r] \subset G_A$ என்றவாறு ஒரு $r > 0$ காண வேண்டும்.

$a \in G_A$ எனில் $a \in A \cap G_M$

$\Rightarrow a \in G_M$

எனவே, $B_M[a, r) \in G_A$ என்றவாறு ஒரு $r > 0$ உள்ளது.

$\Rightarrow A \cap B_M[a, r] \subset A \cap G_M$ என்றவாறு ஒரு $r > 0$ உள்ளது.

$\Rightarrow B_A[a, r] \subset G_A$ என்றவாறு ஒரு $r > 0$ உள்ளது.

எனவே, G_A ஆனது A-ல் திறந்த கணமாகும்.

எனவே, G_A ஆனது A-ன் திறந்த உட்கணமாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

$G_A = A \cap G_M$ என்றவாறு ஒரு திறந்த உட்கணம் G_M ஆனது M-ல் இருக்க வேண்டும்.

Section 6.2

Connected Set

தொடுத்த கணம் (அ) இணைக்கப்பட்ட கணம்

Theorem:

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி என்க.

A என்பது M-ன் உட்கணம் என்க. எனில் A ஆனது கீழ்கண்ட பண்புகளில் ஒன்றைப் பெற்றிருந்தால் மற்றொன்றையும் பெறும்.

a) $A = A_1 \cup A_2$

$\bar{A}_1 \cap A_2$, $A_1 \cap \bar{A}_2$

$\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$

என்றவாறு இரு வெற்றில்லாத M-ன் உட்கணங்களை காண இயலாது.

b) $\langle A, \rho \rangle$ வை ஒரு அளவை வெளியாக கொள்ளும் போது A-வையும், ϕ-யையும் தவிர எந்த ஒரு உட்கணமும் $\langle A, \rho \rangle$-ல் திறந்த உட்கணமாகவும், மூடியதாகவும் இருக்காது.

Proof:

(a) ⇒ (b) என நிறுவ,

$A = A_1 \cup A_2$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$

என்றவாறு இரு வெற்றில்லாத உட்கணத்தின் A_1, A_2 M-ல் காண இயலாது எனக் கொள்க.

(b) உண்மை என நிறுவ வேண்டும்.

மாறாக, (b) உண்மையல்ல எனில் வெற்றில்லாத A-ன் தகு உட்கணமொன்று, A-ல் திறந்ததாகவும், மூடியதாகவும் இருக்கும்.

அதனை A_1 என்க.

எனில் $A_2 = A - A_1$-ம் A-ல் திறந்ததாகவும், மூடியதாகவும் இருக்கும்.

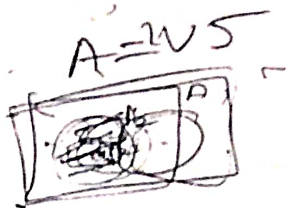
[" M ஒரு அளவைவெளி என்க.

M-ல் திறந்த கணம் எனில்,

$G' = M - G$, M-ல் மூடிய கணமாகும்.

F ஆனது M-ல் மூடிய கணம் எனில்,

$F' = M - F$, M-ல் திறந்த உட்கணமாகும்"] என்ற தேற்றத்தின்படி,



எனவே,

$x \in \bar{A}_2$ எனில்,

$x \in A_2$ [$\because$ A_2 ஒரு மூடிய கணம்] $\bar{A}_2 \subset A_2$

$\Rightarrow x \notin A_1$ [$\because A_2 = A - A_1$] $A - A_1 = A_2$

$\Rightarrow \bar{A}_2 \cap A_1 = \phi$.

இதே போல் $\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$ மற்றும் $A = A_1 \cup A_2$

(a)-க்கு ஒரு முரண்பாடு

எனில் [b] உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore$ A-வையும், ϕ-யையும் தவிர எந்த ஒரு கணமும்

A-ல் திறந்ததாகவும், மூடியதாகவும் இல்லை.

எனவே,

(a) $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (a) என நிறுவ,

A-வையும், ϕ-யையும் தவிர எந்தவொரு கணமும்

A-ல் திறந்ததாகவும், மூடியதாகவும் இல்லை

எனில், (a) உண்மையல்ல எனில்,

$\therefore A = A_1 \cup A_2$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$

என்றவாறு ஒரு வெற்றில்லாத உட்கணங்கள்

A_1, A_2 M-ல் இருக்கும்.

$G = M - \bar{A}_2$ என்க.

எனில் G, M-ல் ஒரு திறந்த கணமாகும்.

$A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$ என்பதால் $A_1 \subset G$

$\Rightarrow G \cap A = G \cap (A_1 \cup A_2)$

$= A_1 \cup \phi$

$= A_1$

எனவே A_1, A-ல் திறந்த கணமாகும்.

[ஏனெனில் G, M-ல் ஒரு திறந்த கணம் மற்றும்

$A_1 = A \cap G$]

இதேபோல் A_2-ம் A-ல் திறந்த கணமாகும்.

$\Rightarrow A_1 = A - A_2$, A-ல் மூடிய கணமாகும்.

i.e) A_1 என்ற A-ன் தகு உட்கணம் A-ல் திறந்த கணமாகவும், மூடிய கணமாகவும் உள்ளது.

இது (b)-க்கு ஒரு முரண்பாடு.

இத (a) உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

Definition:

Connected set [தொடுத்த கணம் (அ) இணைக்கப்பட்ட கணம்]

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி என்க. A என்பது M-ன் உட்கணம் என்க. A ஆனது கீழ்கண்ட பண்புகளில் ஏதேனும் ஒன்றைப் பெற்றிருந்தால் A-ஐ தொடுத்த கணம் என்போம்.

a) $A = A_1 \cup A_2$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$ என்றவாறு வெற்றில்லாத உட்கணங்கள் A_1, A_2 காண இயலாது.

b) $\langle A, \rho \rangle$ வையே ஒரு அளவை வெளி எனக் கொள்ளும் போது, A-வையும், ϕ-யையும் தவிர எந்தவொரு கணமும் A-ல் திறந்ததாகவும் மூடியதாகவும் காண இயலாது.

எ-கா:

$A = [0,1] \cup [2,3]$

R'-ன் தொடுத்த உட்கணமல்ல.

ஏனெனில் $[0,1]$ ஆனது A-ல் திறந்த கணமாகவும் உள்ளது. மூடிய கணமாகவும் உள்ளது.

Theorem: 2

R'-ன் உட்கணமான A தொடுத்த கணமாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை, $a \in A$, $b \in A$, $a < b$ எனில் $a < c < b$ என்றுள்ள ஒவ்வொரு c-யும் A-ல் இருக்கும்.

(ie) $a \in A$, $b \in A$, $a < b$ எனில் $(a,b) \subset A$.

Proof:

R'-ன் உட்கணமான A தொடுத்த கணம் என்க. $a \in A$, $b \in A$, $a < b$ எனில் $(a,b) \subset A$ என நிறுவ வேண்டும்.

மாறாக, $a \in A$, $b \in A$, $a < b$ ஆனால், $a < c < b$ என்றவாறுள்ள ஒரு $c \in R' - A$ $(c \notin A)$ என்க.

$A_1 = A \cap (-\infty, c)$, $A_2 = A \cap (c, \infty)$ என்க.

$A = A_1 \cup A_2$

$x \in \bar{A}_1$, எனில் x ஆனது $(-\infty, c)$-ல் உள்ள ஒரு தொடர்வரிசையின் எல்லையாகும்.

$\Rightarrow x \leq c$

$\Rightarrow x \notin A_2$

$\Rightarrow \bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$

$\Rightarrow A$ தொடுத்த கணமல்ல.

$\Rightarrow$ நமது எடுகோளுக்கு ஒரு முரண்பாடு.

இங்கு நமது $a \in A$, $b \in A$, $a < b$ எனில் $(a,b) \subset A$

எனில் $a \in A$, $b \in A$, $a < b$

மறுதலையாக,

$a\in A$, $b\in A$, $a<b$ எனில் $(a, b)\subset A$ என்க.

A தொடுத்த கணம் என நிறுவ வேண்டும்.

மாறாக,

A தொடுத்த கணமல்ல எனில்,

$A = A_1 \cup A_2$, $\bar{A_1} \cap A_2 = \phi$

என்றவாறு வெற்றில்லாத உட்கணங்கள் A_1 , A_2 R'-ல் இருக்கும்.

$a_1\in A_1$, $a_2 \in A_2$ என்றவாறு இரு புள்ளிகளை தேர்வு செய்க.

1 5

எனில் $a_1 \neq a_2$

1 5

$a_1 < a_2$ எனில்

$B = \{x\in A_1 / a_1 \le x \le a_2\}$ என்க.

$B = A_1 \cap [a_1, a_2]$

எனில் B ஆனது ஒரு வெற்றில்லாத வரம்புடைய மெய்யெண்களின் கணமாகும்.

எனவே, least upper bound axiom படி B-க்கு ஒரு மீச்சிறு மேல் வரம்பு $\bar{a}$ உள்ளது.

$B\subset A$, $\bar{a} \in \bar{A_1}$

எனவே $\bar{a} \notin A_2$ $[\because \bar{A_1} \cap A_2 = \phi]$

ஆனால், $\bar{a} \in [a_1, a_2]$

$\Rightarrow \bar{a} < a_2$

எனவே, $\bar{a} \in A$ அல்லது $\bar{a} \notin A$

அதாவது $\bar{a} \in A$ எனில் $\bar{a} \neq a_1$

$\therefore \bar{a} > a_1$

அதாவது $a_1 < \bar{a} < a_2$ ஆனால் $\bar{a} \notin A$

$\Rightarrow A \not\supset (a_1, a_2)$

மாறாக $\bar{a} \in A$ எனில்,

$\bar{a} \in A_1$ [$\therefore A = A_1 \cup A_2$ & $\bar{a} \in A_2$]

$\Rightarrow \bar{a} \notin A_2$ [$\because A_1 \cap A_2 = \phi$]

ie) $\bar{a}$ ஆனது A_2-ன் எல்லைப்புள்ளி அல்ல.

எனவே $a_1 < c < a_2$ ஆனது $c \notin A_2$ என்றவாறு ஒரு c உள்ளது.

$\bar{a} < c$ என்பதால் $\bar{a}$-ன் வரையறைப்படி,

$c \notin A_1$

எனவே, $c \notin A_1 \cup A_2 = A$

அதாவது $a_1 < c < a_2$. ஆனால் $c \notin A$

$\Rightarrow A \not\supset (a_1, a_2)$

$\bar{a} \in A$ அல்லது $\bar{a} \notin A$ என்ற இரு நிலைகளிலுமே

$A \not\supset (a_1, a_2)$.

இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடாக அமைகிறது.

எனவே, A தொடுத்த கணமாகும்.

எ.கா:

$\langle 0,1 \rangle$ லிருந்து $\langle 0,1 \rangle$ வரை y அச்சிலுள்ள மூடிய இடைவெளி மற்றும் $y = \sin\frac{1}{x}$ $[0 < x < 1]$ என்ற வரைபடம் ஆகியவற்றை உடைய R^2-ன் உட்கணமான B ஒரு தொடுத்த கணமாகும்.

repeated

Sm V.Q

5M

Theorem:

f என்பது அளவை வெளி M_1-லிருந்து M_2-க்கு வரையறுக்கப்பட்ட தொடர்ச்சியான சார்பு என்க. M_1 தொடுத்ததெனில் f-ன் வீச்சும் தொடுத்த கணமாகும்.

Proof:

$A = f(M_1)$ என்க.

எனில் f ஆனது M_1-லிருந்து A-ற்கு செல்லும்

ஒரு முடி கோர்த்தல் ஆகும்.

ie) $f: M_1 \rightarrow A$

$A = f(M_1)$ தொடுத்த கணமல்ல எனில் A-ல்

ஒரு வெற்று இல்லாத தகு உட்கணம் திறந்த

உட்கணமாகவும், மூடிய கணமாகவும் இருக்கும்.

எனவே,

① $\langle M_1, \rho_1 \rangle$, $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ என்பன அளவைவெளி

என்க.

$f: M_1 \rightarrow M_2$ என்க. f ஆனது M_1-ல் தொடர்ச்சி

இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை,

G, M_2-ல் திறந்த கணமாக உள்ளதால்,

$f^{-1}(G)$, M_1-ல் திறந்த கணமாக இருக்க வேண்டும்.

② $\langle M_1, \rho_1 \rangle$, $\langle M_2, \rho_2 \rangle$ என்பன அளவை வெளிகள்

என்க.

$f: M_1 \rightarrow M_2$ என்க.

f ஆனது M_1-ல் தொடர்ச்சியாக இருக்க தேவையா

போதுமான நிபந்தனை

F, M_2-ல் மூடிய கணம் எனில்,

$f^{-1}(F)$, M_1-ல் மூடிய கணமாக இருக்க வேண்டும், என்

தேற்றத்தின்படி,

$f^{-1}(A)$, M_1-ல் திறந்த கணமாகவும், மூடிய கணமாக

இருக்கும். இது, M_1 தொடுத்த அளவைவெளி என்பதற்கு முரண்

ஆகும். $A = f(M_1)$ தொடுத்த கணமாகும்.

ie) f-ன் வீச்சு, M_2-ல் தொடுத்த கணமாகும்.

Corollary [Inter Mediate Value - Theorem]

f என்பது மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியாக $[a, b)$-ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர் சார்பு எனில் f ஆனது $f(a)$-க்கும், $f(b)$-க்கும் இடைப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளையும் அடையும்.

Proof:

" R'-ன் உட்கணமான A தொடுத்த கணமாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை $a \in A$, $b \in A$ மற்றும் $a < b$ எனில் $(a, b) \subset A$"

$[a, b]$, R'-ல் தொடுத்த கணமாகும். எனில்,

" f ஒரு அளவை வெளி M_1-லிருந்து -க்கு செல்லும் தொடர் சார்பு என்க. f-ன் வீச்சகம் தொடுத்த கணமே" என்ற தேற்றத்தின் படி,

$f([a, b])$ தொடுத்த கணமாகும்.

எனவே, மேற்கண்ட தேற்றம் ①-ன் படி,

f ஆனது $f(a)$-க்கும், $f(b)$-க்கும் இடைப்பட்ட எல்லாவித மதிப்பையும் அடைகிறது.

எனவே, f என்பது மூடிய வரம்புடைய இடைவெளியா [b]-ல் வரையறுக்கப்பட்ட தொடர் சார்பு எனில் f ஆனது $f(a)$-க்கும், $f(b)$-க்கும் இடைப்பட்ட அனைத்து மதிப்புகளையும் அடையும்.

Theorem: 4

M ஒரு அளவை வெளி என்க. M தொடுத்ததாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

M-ன் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு தொடர்ச்சியான

சிறப்பியல்பு மாறிலி ஆகும்.

i.e) M தொடுத்ததாக இருக்க தேவையான போதுமான

நிபந்தனை

0-ற்கும், 1-ற்கும் சர்வ சமமான மதிப்புகள் மட்டுமே

M-ல் தொடர்ச்சியான சிறப்பியல்பு சார்புகளாகும்.

Proof:

M ஒரு அளவை வெளி என்க.

ψ என்பது $A \subset M$-ன் சிறப்பியல்பு சார்பு என்க.

i.e) $\psi(x) = 1$ if $x \in A$

$= 0$ if $x \notin A$

எனில் $A = \psi^{-1}(1)$

$M - A = \psi^{-1}(0)$

ψ ஒரு தொடர் சார்பு எனில்,

{ } மூடிய கணம் ஆதலால், A ஒரு மூடிய கணமாகும்.

["$f: M_1 \to M_2$ என்க. f ஆனது M_1-ல் தொடர்ச்சியாக

இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை:

F ஆனது M_2-ல் மூடிய கணம் எனில்

$f^{-1}(F)$, M_1-ல் மூடிய கணம் ஆகும்"] என்ற

தேற்றத்தின் படி,

இதே போல் $M - A = \psi^{-1}(0)$-ம் மூடிய கணமாகும்.

எனவே, A ஒரு திறந்த கணமாகும்.

i.e) ψ ஆனது $A \subset M$-ன் தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பு

எனில் A ஆனது M-ல் திறந்த கணமாகவும், மூடிய

கணமாகவும் இருக்கும். ஆனால், M தொடுத்த அளவை

வெளியெனில் M-ஐயும், ϕ-யையும் தவிர எந்தவொரு

உட்கணமும், M-ல் திறந்ததாகவும், மூடியதாகவும்

இருக்காது.

$\Rightarrow A = M$ (or) $A = \phi$

$\Rightarrow \psi = 1$ (or) $\psi = 0$

எனவே ψ ஒரு மாறிலியாகும்.

அதாவது M-ன் ஒவ்வொரு தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பும் மாறிலியாகும்.

மறுதலை,

M-ல் ஒவ்வொரு தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பும் மாறிலி என்க.

M தொடுத்த கணம் என நிறுவ வேண்டும்.

மாறாக,

M தொடுத்த கணம் அல்ல என்க.

$A = A_1 \cup A_2$, $\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$ என்றவாறு வெற்றில்லாத உட்கணங்கள் A_1, A_2 இருக்கும்.

$\psi(x) = 1$ if $x \in A_1$

$\psi(x) = 0$ if $x \in A_2$

எனவே M-ன் மீது ψ-ஐ வரையறுப்போம்.

$\bar{A}_1 \cap A_2 = \phi$, $A_1 \cap \bar{A}_2 = \phi$ என்பதால்,

ψ ஒரு தொடர் சார்பாகும்.

i.e) ψ ஒரு மாறிலியாகும்.

சமமில்லாத தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பாகும்.

இது ஒரு முரண்பாடாகும்.

எனவே, M தொடுத்த கணம்.

எனவே, M தொடுத்ததாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை, M-ல் ஏதே ஒரு தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பும் மாறிலி ஆகும்.

Theorem: 5m U.Q (2) Question

(4) A_1, A_2 என்பன அளவைவெளி M-ன் தொடுத்த உட்கணங்கள் மற்றும் $A_1 \cap A_2 \neq \phi$ எனில் $A_1 \cup A_2$ தொடுத்த கணமாகும்.

Connected

Proof:

ψ என்பது $A_1 \cup A_2$-மீது தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பு என்க.

$x_0 \in A_1 \cap A_2$

$x_0 \in A_1$ & $x_0 \in A_2$

A_1 தொடுத்த கணமாதலால்,

["M ஒரு அளவை வெளி என்க. M தொடுத்த கணமாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை M-ன் ஒவ்வொரு தொடர் சிறப்பியல்பு சார்பு மாறிலியாகும்"] என்ற தேற்றத்தின் படி,

$\psi(x) = \psi(x_0), \quad \forall x \in A_1$

இதேபோல், $\psi(x) = \psi(x_0), \quad \forall x \in A_2$

$\Rightarrow \psi(x) = \psi(x_0), \quad \forall x \in A_1 \cup A_2$

ie) ψ ஆனது $A_1 \cup A_2$ ன் மீது மாறிலி ஆகும். எனவே, மேற்கண்ட அதே தேற்றத்தின் படி,

$A_1 \cup A_2$ தொடுத்த கணமாகும்.

6.3 Bounded set and totally bounded set

Definition 2m (2) 2m

Bounded set [வரம்புடைய கணம்]

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி என்க.

A ஆனது M-ன் உட்கணம் என்க.

$\rho(x, y) \leq L, \quad \forall x, y \in A$ என்றவாறு ஒரு மிகை மெய்யெண் L உள்ளது.

A வரம்புடைய கணம் ஆகும்.

[A வரம்புடைய கணம் எனில் A-ன் விட்டத்தை [diametre of 'a']

$\text{diam}(A) = \text{l.u.b}\ \rho(x, y)$, $x, y \in A$

என வரையறுப்போம்.

A வரம்புடையதல்ல எனில்

diam $A = \infty$ ஆகும்.

Ex:

i) R'-ன் உட்கணமான A வரம்புடையதாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

A ஒரு முடிவுள்ள நீளத்தை [finite length] கொண்ட ஒரு இடைவெளிக்குள் இருக்க வேண்டும்.

ii) R^2-ன் உட்கணமான A வரம்புடையதாக இருக்க தேவையான, போதுமான நிபந்தனை A ஆனது முடிவுள்ள நீளத்தை கொண்ட விளிம்புடைய (edge) சதுரத்தினுள் இருக்க வேண்டும்.

iii) $(0, \infty)$ என்பது R'-ன் வரம்புடைய உட்கணம் அல்ல.

iv) $(0, \infty)$ என்பது R_d-ன் வரம்புடைய உட்கணம் ஆகும்.

ஏனெனில் $d(x, y) \leq 1$, $\forall x, y \in R_d$

[எனவே diam $A = 1$, $\forall A \subset R_d$.

Definition:

Totally bounded set [முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்ட கணம்]

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி என்க.

A என்பது M-ன் உட்கணம் என்க.

கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-க்கு, diam $A_K < \epsilon$,

$\forall K = 1, 2, \ldots n$.

$$A \subset \bigcup_{K=1}^{n} A_K$$

என்றவாறு முடிவுள்ள எண்ணிக்கை கொண்ட $A_1, A_2, \ldots A_n$, M-ல் உள்ள எனில், உட்கணங்கள் முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ள கணம் ஆகும்.

... முழுமையாக

Theorem 2

அளவை வெளி $\langle M, \rho \rangle$-ன் உட்கணமான A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ளது எனில் வரம்புக்குட்பட்டதாகும்.

Proof:

M-ன் உட்கணமான A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ளது எனக.

எனில், கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon = 1$ க்கு

$$\text{diam } A_k < 1, \quad \forall k = 1, 2, \ldots n$$

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

என்றவாறு முடிவுள்ள எண்ணிக்கை கொண்ட வெற்றில்லா உட்கணங்கள் $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$, M-ல் உள்ளன.

ஒவ்வொரு $k = 1, 2, \ldots n$ க்கு a_k என்பது A_k-ல் உள்ள ஏதாவதொரு புள்ளி எனக.

$D = \rho(a_1, a_2) + \rho(a_2, a_3) + \ldots + \rho(a_{n-1}, a_n)$ எனக.

இப்பொழுது, $x \in A$, $y \in A$ எனில்,

$A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ என்பதால்,

$x \in A_i$, $y \in A_j$ ஏதாவது ஒரு i, j-க்கு $(1 \leq i, j \leq n)$

$\Rightarrow \rho(x, a_i) < 1$, $\rho(y, a_j) < 1$ $\quad [\because \text{diam } A_i < 1, \ \text{diam } A_j < 1]$

$i \leq j$ எனில்

எனவே, $\rho(x, y) = \rho(x, a_i) + \rho(a_i, a_{i+1}) + \ldots + \rho(a_{j-1}, a_j) + \rho(a_j, y)$

$$< 1 + D + 1$$

$$\Rightarrow \rho(x, y) < D + 2, \quad \forall x, y \in A$$

$\Rightarrow A$ வரம்புக்குட்பட்ட கணம் ஆகும்.

எனவே, முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ள கணங்கள் அனைத்தும் வரம்புக்குட்பட்ட கணங்கள் ஆகும்.

...களைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

Definition: ⊗

4

2M

ε - dense set ε - அடர்த்தி கணம்.

A என்பது அளவை வெளி M-ன் உட்கணம் என்க

B என்பது A-ன் உட்கணம் என்க.

ஒவ்வொரு $x \in A$-க்கும், $\rho(x, y) < \epsilon$

என்றவாறு ஒரு $y \in B$ உள்ளது எனில்

B ஆனது A-ல் ε அடர்த்தியாக உள்ளது எனலாம்.

$(\epsilon > 0)$

Theorem: 6

அளவை வெளி $\langle M, \rho \rangle$-ன் உட்கணமான

A முழுமையாக கட்டுப்படுத்தப்பட்டதாக இருக்க

தேவையான போதுமான நிபந்தனை

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும் A-ல் ε-அடர்த்தியாக

உள்ள ஒரு முடிவுள்ள உட்கணம் $\{x_1, x_2, \dots x_n\}$

A-ல் இருக்க வேண்டும்.

A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ளது என்க.
எனில் கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-ற்கு
$\text{diam}\, A_k < \epsilon \quad \forall k = 1, 2 \dots n$

& $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$

என்றவாறு முழுவுள்ள எண்ணிக்கை கொண்ட உட்கணங்கள் $A_1, A_2 \dots A_n$, n-ல் இருக்கும்.
$A_k \neq \phi \; (k = 1, 2 \dots n)$ என்க.
a_k என்பது A_k-ல் உள்ள ஏதோ ஒரு புள்ளி
$\{a_1, a_2 \dots a_n\}$ என்ற கணத்தைக் கொள்
$x \in A$ எனில் $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ என்பதால்,
$x \in A_k$ [ஏதாவது ஒரு k-ற்கும், $1 \leq k \leq n$]
$\Rightarrow \rho(x, a_k) < \epsilon \; [\because x, a_k \in A_k]$
எனவே $\{a_1, a_2, \dots a_n\}$ A-ல் ϵ - அடர்த்தியாக உள்ளது. மறுதலையாக,
$\{x_1, x_2 \dots x_n\}$ என்ற கணம் A-ல் $\epsilon/3$ அடர்த்தியாக உள்ளது என்க.
எனில் $B[x_1, \epsilon/3], B[x_2, \epsilon/3] \dots B[x_n, \epsilon/3]$
என்ற A-ன் உட்கணங்களின் விட்டம்
(i.e) $\text{diam} \leq 2\epsilon/3 < \epsilon$
$y \in A$ என்க.
$\{x_1, x_2, \dots x_n\}$ A-ல் $\epsilon/3$ அடர்த்தியாக உள்ளது
எனவே
$\rho(y, x_i) < \epsilon/3$ ஏதாவது ஒரு i-ற்கு
$\Rightarrow y \in B[x_i, \epsilon/3]$

எனவே $A \subset B[x_1, \epsilon/3] \cup B[x_2, \epsilon/3] \dots \cup B[x_n, \epsilon/3]$
மற்றும் $\text{diam}\, B[x_i, \epsilon/3] < \epsilon \quad i = 1, 2 \dots n$
எனவே A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ளது.
எனவே A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டதாக இருக்கும்.

தேவையான போதுமான நிபந்தனை

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$ க்கும்

A-ல் ϵ- அடர்த்தியாக உள்ள ஒரு முடிவுள்ள

உட்கணம் $\{x_1, x_2 \ldots x_n\}$ A-ல் இருக்க வேண்டும்.

Theorem: 10M U.Q பெய்க்கல.

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி என்க. M-ன்

உட்கணமான A முழுமையான் வரம்புக்குட்பட்டதாக

இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த ஒவ்வொரு

ஒழுங்கு வரிசையும் ஒரு காஷி துணை ஒழுங்கு

வரிசையைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

Proof:

M-ன் உட்கணமான A முழுமையாக

வரம்புக்குட்பட்டுள்ளது என்க.

A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த ஒவ்வொரு

ஒழுங்கு வரிசையும் ஒரு காஷி துணை ஒழுங்கு வரிசையை

பெற்றுள்ளது என நிறுவ வேண்டும்.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஆனது A-ல் உள்ள ஒரு ஒழுங்கு

வரிசை என்க.

A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டது. எனவே,

diam < 1 என்றவாறு உள்ள முடிவுள்ள

எண்ணிக்கையை கொண்ட கணங்கள் A-ற்கு ஒரு

cover ஆக இருக்கும்.

இவற்றில் ஒரு கணமாவது எண்ணற்ற பல

x_n - களை பெற்றிருக்கும். அதனை A_1 என்க.

$n_1 \in I$ யை $x_{n_1} \in A_1$ என்றவாறு தேர்வு

செய்க.

$A_1 \subset A$ என்பதால் A_1 முழுமையாக வரம்புக்கு உட்பட்டது.

~~எனவே diam < 1/2 என்றவாறு உள்ள முடிவுள்ள~~ எண்ணிக்கையைக் கொண்ட கணங்கள் A_1-ந்கு ஒரு cover ஆக இருக்கும்.

இவற்றில் ஒன்று பல எண்ணற்ற x_n-களை பெற்றிருக்கும்.

அதனை A_2 என்க.

$n_2 \in I$ யை $x_{n_2} \in A_2$ மற்றும் $n_2 > n_1$ என்றவாறு தேர்வு செய்க.

$A_2 \subset A_1$ என்பதால் $x_{n_2} \in A$

இதேபோல் தொடர்ந்தால்,

ஒவ்வொரு $K \in I$-ற்கும்,

$$\text{diam } A_K < 1/K \quad , x_{n_K} \in A_K$$

என்றவாறு A_{K-1} ந்கு ஒரு உட்கணம் A_K இருக்கும்.

$\therefore A_K \supset A_{K+1} \supset A_{K+2} \supset \dots$

$x_{n_K}, x_{n_{K+1}}, \dots \in A_K \quad , K = 1,2,\dots$

$K \in I$ ஐ $1/K < \epsilon$ என்றவாறு தேர்வு செய்தோமானால்

$\text{diam } A_K < 1/K < \epsilon$ என்பதால்,

$$\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) < \epsilon \quad , \forall\, i,j \geq K$$

$\Rightarrow \{x_{n_K}\}_{K=1}^{\infty}$ ஆனது $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்ற ஒருங்கு வரிசையின் காஷி துணை ஒருங்கு வரிசையாகும்.

எனவே A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த ஒவ்வொரு ஒருங்கு வரிசையும் ஒரு காஷி துணை ஒருங்கு வரிசையை பெற்றிருக்கும்.

மறுதலை:

A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த ஒவ்வொரு ஒழுங்கு வரிசையும் ஒரு காஷி துணை ஒழுங்கு வரிசையை பெற்றுள்ளது என்க.

A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டுள்ளது என நிறுவ வேண்டும்.

மாறாக,

A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டதல்ல எனில் அளவை வெளி $<M, \rho>$ன் உட்கணமான A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டதாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை,

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும், A-ல் ϵ-அடர்த்தியாக உள்ள ஒரு முடிவுள்ள உட்கணம் $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ A-ல் இருக்க வேண்டும்.

என்ற தேற்றத்தின் படி,

ஒவ்வொரு ஒரு $\epsilon > 0$-க்கு முடிவுள்ள ϵ அடர்த்தியான உட்கணங்கள் எதுவும் A-ல் இருக்காது.

i.e) $x_1 \in A$ எனில் $\{x_1\}$ A-ல் ϵ அடர்த்தியாக இல்லை. எனவே,

$$\rho(x_1, x_2) \geq \epsilon$$

என்றவாறு ஒரு $x_2 \in A$ இருக்கும்.

$\{x_1, x_2\}$-ல் ϵ அடர்த்தியாக இருக்காது.

எனவே,

$$\rho(x_1, x_3) \geq \epsilon, \quad \rho(x_2, x_3) \geq \epsilon$$

என்றவாறு ஒரு $x_3 \in A$ இருக்கும்.

இதே போல் தொடர்ந்தால்,

$\rho(x_j, x_k) \geq \epsilon, \ \forall j, k \in I \ (j \neq k)$ என்றவாறு ஒரு $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒழுங்கு வரிசையை A-ல் அமைக்கலாம்,

ஆனால்,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ எந்தவொரு காஷி துணை ஒழுங்கு வரிசையும் பெற்றிருக்காது.

இது நமது கொள்கைக்கு முரண்பாடு.

எனவே A முழுமையாக வரம்புக்குட்பட்டதாக இருக்க வேண்டும்.

M-ன் உட்கணமான A முழுமையாக வரம்புக்குட்ப இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த ஒவ்வொரு ஒழுங்கு வரிசையும் ஒரு காஷி துணை ஒழுங்கு வரிசையைப் பெற்றிருக்க வேண்டும்.

~~தேற்றம்~~: * * *

B என்பது அளவை வெளி M-ன் உட்கணம் என்க.

B ஆனது M-ல் அடர்த்தியாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-ற்கும் B ஆனது M-ல், ϵ அடர்த்தியாக இருக்க வேண்டும்.

Proof:

B என்ற உட்கணம் M-ல் அடர்த்தியாக உள்ளது என்க. எனில்,

$\bar{B} = M$, ஆகும்.

i.e) M-ல் உள்ள புள்ளி ஒவ்வொன்றும் B-ன் எல்லைப்புள்ளி ஆகும்.

எனவே E என்பது அளவை வெளி M-ன் உட்கணம் என்க.

$x \in M$ என்ற புள்ளி E-ன் எல்லைப் புள்ளியாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

r ஐ மையமாக கொண்ட ஒவ்வொரு திறந்த பந்து $B[x, r]$-ம் E-ன் ஒரு புள்ளியாவது உடையதாக இருக்கும். என்ற தேற்றப்படி,

$x \in M$ எனில், ஒவ்வொரு திறந்த பந்து $B[x, \epsilon]$-ஆம் M-ன் ஒரு புள்ளியாவது இருக்கும். $x \in M$ எனில்,

i.e) கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-ற்கு

$f(x, y) < \epsilon$ என்றவாறு, ஒரு $y \in B$ உள்ளது.

$\Rightarrow$ ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-ற்கும்

B ஆனது M-ல் ϵ அடர்த்தியாக உள்ளது.

மறுதலையாக,

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-ற்கும் B ஆனது M-ல் ϵ அடர்த்தியாக உள்ளது என்க.

எனவே $x \in M$ எனில், ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கும்

$\rho(x, y) < \epsilon$ என்றவாறு ஒரு $y \in B$ உள்ளது.

i.e) x ஐ மையமாக கொண்ட ஒவ்வொரு திறந்த

பந்து $B(x, \epsilon)$-வும் B-ன் ஒரு புள்ளி உள்ளது.

எனவே, x ஆனது B-ன் எல்லைப்புள்ளி ஆகும்.

i.e) M-ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியும் B-ன் எல்லைப்புள்ளி ஆகும்.

$\Rightarrow \bar{B} = M$ எனவே,

B என்ற M-ன் உட்கணம் M-ல் அடர்த்தியாக இருக்க தேவையான போதுமான நிபந்தனை

ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$-க்கு, B ஆனது M-ல் ϵ அடர்த்தியாக இருக்க வேண்டும்.

Section 6.4

Complete Matric Space

முழுமையான அளவை வெளி

5 $5m$

Definition:

M ஒரு அளவைவெளி என்க.

M-ல் உள்ள புள்ளிகளில் அமைந்த ஒவ்வொரு காஷி ஒழுங்கு வரிசையும் M-ல் உள்ள புள்ளிக்கு ஒருங்குகின்றது எனில் M-ஐ முழுமையான அளவைவெளி என்போம்.

எ-கா:

1. R^1 - முழுமையான அளவைவெளி
2. l^2 முழுமையான அளவை வெளி ஆகும். 5M

5/6M U.Q 10M Repeated

ie) $\| s^{(n)} \|_2 < A \quad \forall n \geq N$ (ஒரு $A > 0$-க்கு) —— ②

①-லிருந்து,

ஒவ்வொரு $K \in I$-க்கும்,

$$| s_K^{(n)} - s_K^{(m)} | \leq \| s^{(n)} - s^{(m)} \|_2 < \epsilon \quad , \forall n, m \geq N$$

$\Rightarrow$ R'-ல் $\{ s_K \}_{K=1}^{\infty}$ ஒரு காஷி ஒருங்கு வரிசை ஆகும்.

எனவே,

$\{ s_K \}_{K=1}^{\infty}$ ஆனது R'-ல் ஒருங்குகின்றது.

[ஏனெனில் R'-ல் ஒவ்வொரு காஷி ஒருங்கு வரிசையும் ஒருங்குகின்றது]

$\underset{n \to \infty}{Lt} \; s_K^{(n)} = s_K \quad , s_K \in R'$ என்க.

மற்றும், $s = \{ s_K \}_{K=1}^{\infty}$ என்க.

$s \in l^2$ என நிறுவ, சமன்பாடு ②-லிருந்து,

$$\left[\sum_{K=1}^{\infty} s_K^{(n)^2} \right]^{1/2} \leq A \quad , \forall n \geq N$$

$$\Rightarrow \sum_{K=1}^{\infty} s_K^{(n)^2} \leq A^2 \quad \forall n \geq N$$

Hence for any integer $L \in I$

$$\sum_{K=1}^{L} s_K^{(n)^2} \leq A^2 \quad , \forall n \geq N \quad —— ③$$

ஆனால், $K = 1, 2, \ldots L$ க்கு $s_K^{(n)} \to s_K$ as $n \to \infty$

எனவே,

$$\sum_{K=1}^{L} s_K^{(n)^2} \to \sum_{K=1}^{L} s_K^2 \quad \text{as } n \to \infty$$

எனவே,

$$\sum_{K=1}^{L} s_K^2 \leq A^2 \quad \forall K \in I$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} s_k^2 \le A^2$$

$$\Rightarrow s = \{s_k\}_{k=1}^{\infty} \in \ell^2 \quad \forall k \in I$$

$\{s^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \to s$ என நிறுவ,

① -லிருந்து,

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} \left(s_k^{(n)} - s_k^{(m)}\right)^2\right]^{1/2} < \epsilon, \quad \forall n, m \ge N$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(s_k^{(n)} - s_k^{(m)}\right)^2 < \epsilon^2, \quad \forall n, m \ge N$$

எனவே, எந்தவொரு $L \in I$ -க்கும்

$$\sum_{k=1}^{L} \left(s_k^{(n)} - s_k^{(m)}\right)^2 < \epsilon^2, \quad \forall n, m \ge N$$

எனவே M ஆனது மிகை முடிவிலியை அணுக, $M \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{L} \left(s_k^{(n)} - s_k\right)^2 < \epsilon^2, \quad \forall n \ge N \ \& \ L \in I$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left(s_k^{(n)} - s_k\right)^2 < \epsilon^2, \quad \forall n \ge N$$

$$\Rightarrow \| s^{(n)} - s \|_2^2 < \epsilon^2, \quad \forall n \ge N$$

$$\rho(s^{(n)}, s) = \| s^{(n)} - s \|_2 < \epsilon, \quad \forall n \ge N$$

$\Rightarrow s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots$ என்ற ஒருங்கு வரிசையானது $s \in \ell^2$ -க்கு ஒருங்குகின்றது.

எனவே, ℓ^2 -ல் உள்ள ஒவ்வொரு காஷி ஒருங்கு வரிசை ℓ^2 -ல் உள்ள புள்ளிக்கே ஒருங்குகின்றது.

U.Q 5m

Theorem

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு முழுமையான அளவைவெளி மற்றும் A ஆனது M-ல் மூடிய உட்கணம் எனில் $\langle A, \rho \rangle$-ம் முழுமையானது.

Proof:

A என்பது M என்ற முழுமையான அளவை வெளியின் மூடிய உட்கணம் என்க.

$\langle A, \rho \rangle$ முழுமையானது என நிறுவ,

A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த ஒவ்வொரு காஷி ஒருங்குவரிசையும் A-ல் உள்ள புள்ளிக்கு ஒருங்குகின்றது என நிறுவ வேண்டும்.

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது A-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த காஷி ஒருங்குவரிசை என்க.

A, M-னுடைய உட்கணமாதலால்,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது M-ல் உள்ள புள்ளிகளால் அமைந்த காஷி ஒருங்குவரிசை ஆகும்.

M முழுமையானது என்பதால்,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, M-ல் உள்ள ஒரு புள்ளி x-க்கு ஒருங்குகின்றது.

எனவே,

x, A-ல் எல்லைப்புள்ளி ஆகும்.

A மூடிய கணம் என்பதால்,

$x \in A$ ஆகும்.

எனவே,

A-ல் உள்ள ஒவ்வொரு காஷி ஒருங்குவரிசையும் A-ல் உள்ள புள்ளிக்கு ஒருங்குகின்றது.

எனவே, A முழுமையானதாகும்.

எனவே, [முழுமையாக அளவை வெளியின் மூடிய உட்கணங்கள் முழுமையானதாகும்.]

எ.கா:

R' - முழுமையான அளவைவெளி.

$[0,1]$ என்பது R'-ன் மூடிய உட்கணமாகும்.

எனவே, மேற்கண்ட தேற்றத்தின் படி,

$[0,1]$ முழுமையானதாகும்.

Theorem 2: 6.4.8 nested interval theorem:- state and prove

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு முழுமையான அளவைவெளி என்க.

ஒவ்வொரு $n \in I$-க்கும் F_n என்பது,

$F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \dots$

என்றவாறு அமைந்த மூடிய வரம்புக்குட்பட்ட உட்கணம் என்க. மற்றும்,

$\operatorname{diam} F_n \to 0$ as $n \to \infty$ என்க.

எனில்,

$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$-ல் ஒரே ஒரு புள்ளி மட்டுமே இருக்கும்.

Proof:

ஒவ்வொரு $n \in I$-க்கும் a_n என்பது, F_n-ல் உள்ள ஏதாவது ஒரு புள்ளி என்க.

$F_n \supset F_{n+1} \supset F_{n+2} \supset \dots$ என்பதால்,

$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots \in F_n \quad \forall n \in I$

$\operatorname{diam} F_n \to 0$ as $n \to \infty$ என்பதால்

கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-க்கு $\operatorname{diam} F_N < \epsilon$ என்றவாறு ஒரு $N \in I$ உள்ளது.

$a_N, a_{N+1}, a_{N+2}, \dots \in F_N$ என்பதால்,

$\rho(a_n, a_m) \leq \operatorname{diam} F_N < \epsilon, \quad \forall m, n \geq N$

$\Rightarrow \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒரு காஷி ஒருங்குவரிசை ஆகும்.

M முழுமையானது என்பதால்,

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ M-ல் உள்ள ஒரு புள்ளி a-க்கு ஒருங்க வேண்டும்.

எனவே, ஒவ்வொரு $n \in I$-க்கும்,

$a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ என்ற F_n-லுள்ள ஒருங்கு வரிசையானது a-க்கு ஒருங்குகின்றது.

(i.e) ஒவ்வொரு F_n-க்கும் a எல்லைப் புள்ளியாகும்.

$\Rightarrow a \in F_n, \ \forall n \in I$ [ஏனெனில் F_n மூடிய கணமாகும்]

$\Rightarrow a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

$b \in M$ ஆனால் $b \neq a$ எனில் $\rho(a,b) > 0$

எனவே,

$\rho(a,b) > \text{diam } F_n$ போதுமான பெரிய மதிப்பு

உள்ள n-க்கு,

எனவே அந்த n-க்கு,

$b \notin F_n$

$\Rightarrow b \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

எனவே $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ ஒரே ஒரு புள்ளியை மட்டும் கொண்டதாகும்.

Note:

$T: M \to M$ மற்றும் $x \in M$ எனில்,

$T(x)$ ஐ Tx என எழுதலாம்.

$T \circ T$ ஐ T^2 என எழுதலாம்.

$T \circ T^2$ ஐ T^3 என எழுதலாம்.

Definition: (contraction) : (6) 2m

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு அளவை வெளி.

$T : M \to M$ என்க.

$\rho(Tx, Ty) \le \alpha \rho(x, y), \forall x, y \in M$

மற்றும் $0 \le \alpha < 1$ என்றவாறு ஒரு $\alpha \in R$ உள்ளது எனில் T ஐ M-ன் மீதான சுருக்கி கோர்த்தல் என்போம்.

[T is said to be a contained in M]

Note: Eg:-

1. α அனைத்து x, y ஐ சேர்ந்திருக்க கூடாது.
2. T, M-ன் மீதான சுருக்கிகோர்த்தல் எனில் T, M-ல் தொடர்ச்சியாக இருக்கும்.

Proof:

M-ன் மீதான சுருக்கி கோர்த்தல் T எனில்,

$\rho(Tx, Ty) \le \alpha \rho(x, y), \forall x, y \in M$ மற்றும்

$0 \le \alpha < 1$ என்றவாறு ஒரு $\alpha \in R$ உள்ளது.

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-க்கு,

$\delta \le \epsilon/\alpha$ எனத் தேர்வு செய்தால்,

$\rho(Tx, Ty) < \alpha \cdot \epsilon/\alpha = \epsilon$ where

Whenever $\rho(x, y) < \delta = \epsilon/\alpha$

எனவே T, M-ல் தொடர்ச்சியாக உள்ளது.

எ.கா:

$T = l^2 \to l^2$ என்ற சார்பானது

$u = \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ எனில் $Tu = \left\{\frac{u_n}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$

என வரையறுப்போம்.

$u = \{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ எனில்,

$$\rho(Tu, Tv) = \|Tu - Tv\|_2$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{u_n}{2} - \frac{v_n}{2}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(u_n - v_n)^2}{4}\right]^{1/2}$$

$$= \left[\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)^2\right]^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2}\rho(u, v)$$

எனவே,

$\alpha = 1/2$ எனில்,

$$\rho(Tu, Tv) \leq \alpha\rho(u, v)$$

எனவே T ஆனது l^2-ன் மீதான ஒரு சுருக்கு கோர்த்தல் ஆகும்.

Note:
இந்த சுருக்கு கோர்த்தல் T-க்கு
ஒரே ஒரு $s = \{0, 0, \dots\}$
$Ts = s$ என்றவாறு ஒரே ஒரு
மட்டுமே l^2-ல் உள்ளது.

V.Q

Picard's fixed-point Theorem: (X) V.V.I

10M

$\langle M, \rho \rangle$ ஒரு முழுமையான அளவைவெளி என்க.

T ஆனது M-ன் மீதான சுருக்கு கோர்த்தல் எனில் $Tx = x$ என்றவாறு ஒரே ஒரு புள்ளி x மட்டுமே M-ல் உள்ளது.

[T ஆனது M-ன் மீதான சுருக்கி கோர்த்தல் T ஒரு நிலையான புள்ளியை மட்டுமே கொண்டுள்ளது].

Proof:

$x, y \in M$ என்க.

T, M ன் மீதான சுருக்கி கோர்த்தல் என்பதால்,

$\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y), \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad \forall x, y \in M$

என்றவாறு ஒரு $\alpha \in R$ உள்ளது.

consider.

$$\rho(T^2x, T^2y) = \rho(T(Tx)\,T(Ty))$$
$$\leq \alpha \rho(Tx, Ty)$$
$$\leq \alpha^2 \rho(x, y)$$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

எந்தவொரு $n \in I$-க்கும் $\rho(T^n x, T^n y) \leq \alpha^n \rho(x, y)$, $\forall x, y \in M$

$Tx = x$ என்றவாறு ஒரே ஒரு புள்ளி x மட்டுமே M-ல் உள்ளது என நிறுவ,

M-ல் ஏதோ ஒரு புள்ளி x_0-ஐத் தேர்வு செய்க.

$x_1 = Tx_0$

$x_2 = Tx_1$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad x_n = T^n x_0$

i.e) $x_{n+1} = Tx_n, \ \forall n \in I$ காண்க —(1)

எனில்,

$$x_2 = Tx_1 = T(Tx_0) = T^2 x_0$$
$$x_3 = Tx_2 = T(T^2 x_0) = T^3 x_0$$

$\dots$

பொதுவாக $x_n = T^n x_0$, $\forall n \in I$

எந்த $m, n \in I$-க்கும்

$m > n$ எனில் $m = n + p$ ஏதாவதொரு $p > 0$-க்கு

$$\rho(x_n, x_m) = \rho(x_n, x_{n+p})$$

$$\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p})$$

$$\leq \rho(T^n x_0, T^n x_1) + \rho(T^{n+1} x_0, T^{n+1} x_1) + \cdots + \rho(T^{n+p-1} x_0, T^{n+p-1} x_1)$$

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1) + \alpha^{n+1} \rho(x_0, x_1) + \cdots + \alpha^{n+p-1} \rho(x_0, x_1)$$

$$\leq \alpha^n \rho(x_0, x_1)(1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots)$$

$$= \frac{\alpha^n \rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}$$

ie) $\rho(x_n, x_m) \leq \dfrac{\alpha^n \rho(x_0, x_1)}{1-\alpha} \to 0$ as $n \to \infty$ for $m > n$, $m, n \in I$

$0 \leq \alpha < 1$ என்பதால்,

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-க்கு

$$\alpha^n < \frac{\epsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)} \quad \forall n \geq N$$

என்றவாறு ஒரு $N \in I$ உண்டு.

எனவே, $m, n \geq N$ எனில்

③-லிருந்து,

$$\rho(x_n, x_m) < \frac{\epsilon(1-\alpha)}{\rho(x_0, x_1)} \cdot \frac{\rho(x_0, x_1)}{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow \rho(x_n, x_m) < \epsilon$$

$\Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ஒரு காஷி தொடர்

M முழுமையான அளவை வெளி என்பதால்,

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ M-ல் உள்ள ஒரு புள்ளி x-க்கு ஒருங்குகின்றது.

i.e) $\lim_{n\to\infty} x_n = x$

$\{x_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ என்பது $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ன் துணை ஒருங்கு வரிசை ஆதலால்,

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x \quad \text{—— ③}$$

$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ என்பதால்,

கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$-க்கு,

$$\rho(x_n, x) < \epsilon/\alpha, \quad \forall n \geq N$$

என்றவாறு ஒரு $N \in I$ உள்ளது.

எனவே,

$$\rho(Tx_n, Tx) \leq \alpha \rho(x_n, x) < \alpha \cdot \epsilon/\alpha = \epsilon, \quad \forall n \geq N$$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} Tx_{n+1} = Tx$ [① -லிருந்து]

$\Rightarrow x = Tx$ [③ -லிருந்து]

எனவே x, T-ன் நிலையான புள்ளியாகும்.

x மட்டுமே T-ன் நிலையான புள்ளி என

நிறுவ,

$y \in M$, $y \neq x$ எனில் y, T-ன் நிலையான புள்ளி அல்ல என நிறுவ வேண்டும்.

மாறாக,

$y \in M$, $y \neq x$ ஒரு நிலையான புள்ளி எனில்

$Ty = y$

எனில்,

$$\rho(x, y) = \rho(Tx, Ty)$$

$$\rho(\cancel{x}, \cancel{y}) \leq \alpha \rho(x, \cancel{y})$$

$x \neq y$ என்பதால்,

$$\rho(x, y) \neq 0$$

எனவே, $\rho(\cancel{x}, y) \leq \alpha \rho(\cancel{x}, y)$

$$\Rightarrow 1 \leq \alpha$$

இது $0 \leq \alpha < 1$ என்பதற்கு முரண்பாடு.

எனவே,

$$Ty \neq y$$

எனவே, T ஆனது M-ன் மீதான சுருக்கு கோர்த்தல் எனில் $Tx = x$ என்றவாறு ஒரே ஒரு புள்ளி x மட்டும் தான் M-ல் இருக்கும்.

$\rho(x, y) \leq \rho(Tx, Ty)$

$\leq \alpha \rho(x, y)$

$x \neq y$ எனின்

$\rho(x, y) \neq 0$

$\rho(x, y) \leq \alpha \rho$